碩士學位論文

# 피 보 나 치 수 열 에 대 하 여

## -- 수열의 역사와 응용, 그리고 현대적 해석과 현장수업을 중심으로 --

2000. 12.

韓南大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

朴 淑

# 피 보 나 치  수 열 에  대 하 여

# About the Fibonacci sequence

指 導 教 授  崔 恩 美

이 論文을 碩士學位 論文으로 提出함

2000年  12月

韓南大學校 教育大學院

數學教育專攻

朴  淑

朴　淑의 碩士學位 論文을 認准함

審査委員　　　　　　　인

審査委員　　　　　　　인

審査委員　　　　　　　인

2000년　12월

韓南大學校 敎育大學院

# 차 례

# 표 차 례

# 그 림 차 례

# 1장 서론

21세기의 세계화·정보화 사회를 맞이하여 학생들의 다양한 능력과 적성을 계발하고 창의성이나 문제 해결 능력을 신장시켜야 한다는 목소리가 높아지고 있고, 그로 인하여 수학의 중요성은 더욱 더 깊게 인식되고 있다. 그러나 잘못된 입시교육의 병폐 때문에 그 동안 수학적 사고과정이나 개념과 원리를 충분히 이해하지 못한 상태에서 단편적인 공식의 암기나 기계적인 문제풀이에만 치중했던 것도 사실이다. 이 결과 수학은 아무런 맛도 멋도 없는 것이며, 특히 학교 수학은 어렵고 지루하다는 굴레를 쓰게 된 것이다. 학교수학이 어려운 것은 부인할 수 없는 사실이다. 그런데 학교수학이 어려울 수밖에 없는데는 여러 가지 이유가 있다.

한 가지 이유로는 수학이 가시적이고 물리적인 대상을 취급하기보다는 그것을 추상화하여 만들어 낸 관념적인 대상을 취급한다는 것을 들 수 있다. 수학을 학습하는 과정은 추상화된 개념을 이해하는 과정이다. 즉, 학생들은 수학 학습의 과정에서 물리적인 세계를 떠나 관념의 세계로 들어가게 된다. 그렇기 때문에 추상화에 익숙하지 않은 학생들에게 수학은 어려울 수밖에 없다[1].

수학이 외래 학문이라는 것도 수학을 어렵게 하는 또 한 가지 이유가 될 수 있다. 수학 그 자체가 외래 학문이기 때문에 어려운 것이 아니라, 수학에서 구사되고 있는 용어가 외래적인 것이기에 수학이 어렵다고 할 수 있다. 다시 말해, 수학은 학생들이 일상적으로 경험해 온 용어로 설명되기보다는 대개는 경험해 본 적이 없는 아주 낯선 용어로 설명된다. 그래서 수학 용어는 한글임에도 불구하고 낯선 외래어로 등장하여, 그 결과 수학 학습을 힘들게 하고, 결국에는 수학이 어려워지게 된다.

학교 수학시간에는 성적을 올려 상급학교에 진학해야 하고 따라서 한정된 시간 내에 일정한 진도를 나가야 된다는 여러 제약 때문에 선생님들은 딱딱

한 교과서 이외의 이야기를 꺼낼 겨를이 없다.

그러나 장차 수학자가 되기를 바라지 않는다 해도 누구나 수학을 이해하고 흥미를 느낄 줄 알아야 한다. 안타깝게도 아직 우리 주변에는 극소수의 소질 있는 사람을 빼고는 수학을 재미있다고 생각하는 사람이 드물다.

고대의 그리스나 로마시대에는 수학이 모든 학문의 기초가 되었다. 수학을 모르면 과학은 생각조차 할 수 없었다. 수와 도형을 이용하여 자연현상을 규명하려 한 철학자(과학자이면서 수학자이기도 한)들도 많았다. 수학은 곧 철학이며 과학이었던 것이다.

또한 수학의 아름다움에 대한 측면은 우리 주위에서 쉽게 찾아볼 수 있다. 이를테면 눈의 결정이 정육각형과 같은 또는 그와 유사한 모양을 하고 있다든지, 벌집의 단면이 정육각형으로 되어 있다든지 하는데서 찾아볼 수 있다[9]. 그리고 광물의 결정 구조는 모두 기하학적인 도형과 유사함을 알 수 있다. 또 고대의 미술가, 건축가 그리고 조각가들에게 잘 알려져 왔던 그리고 오늘날에도 여전히 관심의 대상이 되는 대칭, 황금분할 등도 수학적 아름다움을 나타내 준다.

이렇게 수학이 아름다움의 원천이 되기 때문에 학교에서 수학을 가르치고 배워야 할 가치가 있는 것으로 생각할 수 있다. 학생들로부터 일반적으로 기피되고 있는 수학에 대한 관심과 호기심을 유도하기 위해 현장 교육을 담당하는 사람들은 수학의 아름다운 모습을 학생들에게 보여주기 위해 끊임없는 노력이 필수적일 것이다.

이러한 노력의 일환으로 이 논문에서는 중세 시대에 일상생활의 토끼 번식 문제에서 파생된 피보나치 수열을 연구하려고 한다. 피보나치 수열은 우리가 쉽게 자연 속에서 관찰할 수 있는 여러 현상이 수학과 어떻게 연관되어 있는가를 보여줄 수 있는 좋은 소재가 된다. 1200년대를 살았었던 피보나치가 이집트를 여행하면서 발견한 것이라고 전해지는 이 수열은, 당시에는 별다른 주목을 받지 못한 채 단순한 흥미 거리 정도로밖에 대접받지 못했다[2]. 그러나 최근 들어 수학의 영역이 퍼지 이론이나 카오스 이론같이 비 선형대수(non-linear mathematics) 쪽으로 발전해 나감에 따라, 그의 수

열은 새롭게 조명을 받고 있다.

이 논문에서는 피보나치의 생애, 피보나치 수열의 정의 및 특징을 살펴보고, 자연현상 속에서 관찰되어지는 피보나치 수열의 모습, 예술과 건축에서 적용되는 피보나치 수열의 형태를 알아본다. 또한 정보화 사회에 주역이 되는 컴퓨터와 주식시장에서 응용되는 피보나치 수열의 모습을 조사하고, 마지막으로 피보나치 수열을 현장 수업에서는 어떻게 활용할 수 있는지 방법을 모색해 보고자 한다.

이 연구를 통하여 1200년경에 만들어진 수학의 한 이론이 발전을 거듭하여 정보화 사회라고 일컬어지는 21세기에 새로운 국면으로 다가올 수 있다는 점을 강조함으로써 학생들에게 수학의 역동성을 보여주는 실례가 될 것이다. 또한 우리 주변의 상당히 많은 곳에 피보나치 수열이 활용되고 있음은 학생들이 자주 질문하는 수학의 실효성에 대한 좋은 예가 될 것이라고 생각한다.

# 2장　피보나치 수열의 발생

## 1. 피보나치의 생애

지금으로부터 약 800년 전에 이탈리아의 상인이며 수학자인 피보나치(Fibonacci, 1175?-1250?)는 중세시대 유럽의 대수학자이다. 피보나치, 그는 1175년경 이탈리아 피사의 상업 중심지에서 태어났으며, Leonardo of Pisa라 불리었다. 알려진 'Fibonacci'는 'Bonacci의 아들'이란 뜻의 'filius Bonacci'를 짧게 말한 것이라고 한다[1].

그의 아버지는 상업과 관련된 일에 종사하였다. 당시 이탈리아의 큰 상인들은 지중해 연안 여러 곳에 상점을 두고 있었는데 그의 아버지가 관세 관리인으로 아프리카의 북부 연안에 위치한 보기(Bougie)에서 근무하게 되었고, 레오나르도는 그 곳에서 교육을 받았다. 아버지의 직업 때문에 소년시절부터 일찍이 산술에 흥미를 느끼기 시작했으며 이후 이집트, 시칠리아, 그리스, 시리아 등을 여행하면서 동부와 아라비아의 수학을 접하였다. 인도-아라비아의 계산술의 실용적 우수성에 완전한 확신을 가지게 된 그는 1202년에 고향으로 돌아와 그의 유명한 저서『산반서, Liber abaci』를 출간하였다.

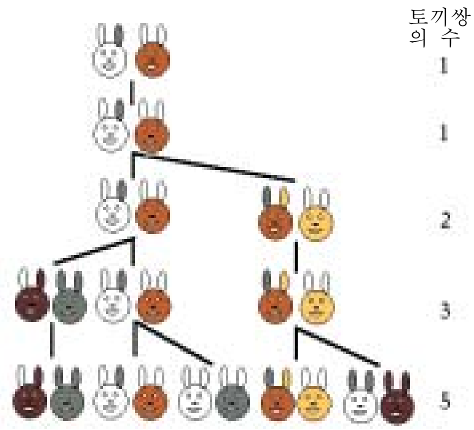
이 저작은 산술과 초등대수에 관하여 쓴 것으로 비록 독립적인 연구이긴 하지만 알-화리즈미와 아부-카밀의 대수로부터 많은 영향을 받았음을 볼 수 있다. 이 책은 인도-아라비아 숫자를 유럽으로 소개하는 데 큰 역할을 하였고, 새로운 숫자를 읽고 쓰는 법, 정수와 분수의 계산법, 제곱근과 세제곱근을 구하는 법, 대수적 과정에 의한 일, 이차방정식의 해법 등을 설명하고 있다. 이 책에는 많은 문제가 실려 있는데 이것은 수세기 동안 그 이후의 저술가들에게 수학문제의 보고(寶庫)가 되었으며, 이 책의 영향으로 인도-아라비아의 수 체계가 급속하게 보급되었다.

# 2. 피보나치 수열의 정의 및 성질

## 가. 피보나치 수열의 정의

1202년 피보나치가 연구한 원래 문제는 토끼가 이상적인 환경에서 어떻게 번식하는가에 대한 것이었다. '태어난 암수 두 마리의 토끼가 들판에 놓였다고 하자. 토끼들은 한 달 후에 성숙하여 2달의 끝 부분에서 암컷이 한 쌍의 토끼를 낳는다. 토끼들이 결코 죽지 않고, 암컷은 항상 암수 한 쌍의 새끼를 둘째 달부터 계속해서 낳는다고 하면 1년 후에는 얼마나 많은 토끼가 들판에 있을까'를 생각한 것이 피보나치 수열 연구의 시초이다. [그림 1]을 참고로 생각해보자.

① 한 달 후에 그들이 짝을 짓지만 여전히 한 쌍만 있다.
② 두 달 후에 암컷은 한 쌍의 새끼를 낳아, 모두 두 쌍의 토끼가 된다.
③ 세 달 후에 원래 암컷은 두 번째 한 쌍의 새끼를 낳으므로 모두 합쳐서 세 쌍이 된다.
④ 넉 달 후에 원래 암컷은 또 다른 한 쌍의 새끼를 낳았으며 두 달 전에 태어난 암컷이 역시 첫 번째 새끼를 낳으므로 5쌍이 된다.

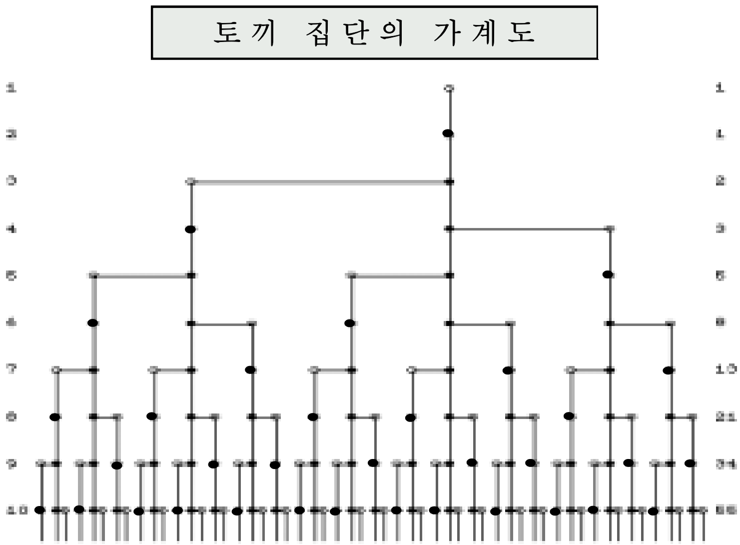


<그림 1> 월별 번식하는 토끼

그러면 매달 토끼 쌍의 수는 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …이 된다.

그러나 이 문제는 비현실적인 점을 갖고 있다. 토끼는 절대로 죽지 않는다는 것과 각 세대가 정확히 암수 한 마리씩 두 마리라는 것이다. 또한 남매가 짝짓는 것은 유전학적으로 여러 문제를 일으킬 수 있다. 현실적으로는 불가능하지만 우선은 수열에만 관심을 갖도록 하자.

<그림 2>와 <표 1>은 토끼가 다달이 어떻게 번식하는지 더 세분해서 나타낸 월별 토끼 집단의 가계도와 월별 토끼 집단의 수에 대한 표이다. 여기에서 나열된 수열, 즉, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, … 이 피보나치 수들로 이루어진 피보나치 수열이다.




<그림 2> 월별 토끼 집단의 가계도

<표 0> 월별 토끼 집단의 수

| 달 | 성인 토끼(쌍) | 어린 토끼(쌍) | 전체 쌍의 수 |
|---|---|---|---|
| 1월 | | 1 | 1 |
| 2월 | 1 | | 1 |
| 3월 | 1 | 1 | 2 |
| 4월 | 2 | 1 | 3 |
| 5월 | 3 | 2 | 5 |
| 6월 | 5 | 3 | 8 |
| 7월 | 8 | 5 | 13 |
| 8월 | 13 | 8 | 21 |
| 9월 | 21 | 13 | 34 |
| 10월 | 34 | 21 | 55 |
| 11월 | 55 | 34 | 89 |
| 12월 | 89 | 55 | 144 |

## 나. 피보나치 수열의 성질

수열을 살펴보면 다음과 같은 여러 가지 재미있는 성질이 숨어있다[18].

첫째, 이어지는 두 숫자들을 더해 나가면 그 다음 숫자가 된다. 즉 $3+5=8$이며 $13+21=34$, $55+89=144$가 된다.

둘째, $n$번째 값을 $(n-2)$번째로 나누면 몫은 2가되고, 나머지는 $(n-1)$번째가 된다. 즉 21을 8로 나누면 몫은 2이며 나머지는 5가 되는데, 5는 8의 앞 값이다. 144를 55로 나누어도 나머지는 34인데 이는 55 바로 전 값이다.

셋째, 피보나치 수를 다른 피보나치 수로 나눈 값을 피보나치 비(ratio)라고 하는데 보통은 인접한 두 수 중 작은 수를 큰 수로 나눈 값을 일컫는다. 즉 $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{21}{34}$와 같은 값인데, 이를 계산해보면 점점 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$(약 0.618)에 가까워진다는 것을 알 수 있고 이것이 바로 '황금비(golden ratio)'이다.

넷째, $(n+1)$번째의 수를 $n$번째 수로 나누면 점점 1.618에 접근한다. 즉,

$$\frac{2}{3}=1.50;\ \frac{21}{12}=1.614;\ \frac{55}{34}=1.6176;\ \frac{144}{89}=1.61797;\ \frac{987}{610}=1.618032.$$

다섯째, $(n+2)$번째 숫자를 $n$번째 숫자로 나누면 그 값은 점점 2.618에 접근한다. 예를 들어 $\frac{5}{2}=2.50$; $\frac{21}{8}=2.625$; $\frac{144}{55}=2.61818$ 등이 된다.

여섯째, 1.618의 역수는 0.618이며, 2.618의 역수는 0.382가 된다.

일곱째, 수열의 이웃하는 두 수의 차이들도 같은 규칙의 수열을 이룬다.

이 외에도 두 숫자의 비율을 나타내는 1.618, 0.618 그리고, 2.618, 0.382의 관계에서 다음과 같은 사실들을 살펴볼 수 있다.

| | |
|---|---|
| $1.618 \times 0.618 = 1$ | $2.618 \times 0.382 = 1$ |
| $2.618 - 1.618 = 1$ | $1.618 - 0.618 = 1$ |
| $1 - 0.618 = 0.382$ | $0.618 \times 0.618 = 0.382$ |
| $1.618 \times 1.618 = 2.618$ | $2.618 \times 0.618 = 1.618$ |

# 3장 피보나치 수열의 응용

피보나치가 연구한 토끼 기르기 문제는 현실성도 없고 적당히 고안된 것이지만, 거기에서 파생된 피보나치 수열은 솔방울, 해바라기, 앵무조개, 컴퓨터 검색, 주식시장 등, 자연현상과 실생활에서 자연스럽게 나타나고 있다.

## 1. 자연현상 속의 피보나치 수열

자연에서 피보나치 수열을 볼 수 있는 가장 확실한 것들 중 하나는 식물들의 성장 패턴에 있다.

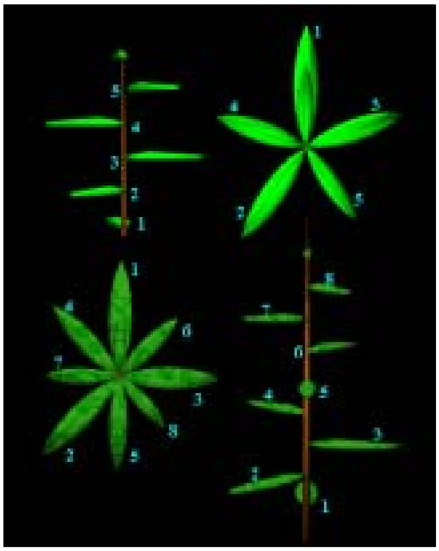
식물들은 주기적으로, 성장에 필요한 요소들(유용한 습기, 햇빛, 공기 등)을 받아들이기 위하여 나선형으로 성장하는 경향을 가지고 있다. 즉, 가지의 끝이 그 요소들에 도달하기 위하여 원형으로 움직임과 동시에 올라가기 때문에 가지의 끝은 공간 속으로 나선형으로 움직이며 성장한다. 이와 같이 성장 나선형은 원형적인 운동과 성장의 두 가지로 특징지어진다.

### 가. 잎의 배열

많은 식물의 줄기에 돋아난 잎의 배열에서도 피보나치 수열을 찾을 수 있다. 식물을 살펴보면, 위의 잎이 밑의 잎을 가리지 않도록 배열되어 있다. 이는 모든 잎이 햇빛을 똑같이 잘 받는 등, 잎이 필요로 하는 요소들을 서로의 방해 없이 고루 얻을 수 있는 배치임을 짐작할 수 있다.

줄기를 회전하는 회전수와 잎에서 잎으로 갈 때마다 처음 출발한 잎의 바로 위의 잎을 만날 때까지 만나게 되는 잎들을 세는 데서 피보나치 수열을 발견할 수 있다. 각 방향에서의 회전수와 회전하며 만나게 되는 잎의 수는 연속하는 세 피보나치 수이다.

예를 들어 왼쪽의 식물에서 줄기의 밑 근처에 있는 하나의 잎에 초점을 두고, 그것과 같은 방향으로 뻗어 나온 잎까지 도달하려면 시계방향으로 세 바퀴 회전해야 하고 중도에서 5개의 잎들을 지난다. 반 시계 방향으로는 두 바퀴만 회전하면 된다. 이 때, 2, 3, 5는 물론 피보나치 수들이다. 오른쪽의 식물은 8개의 잎을 지나며 시계방향으로 5바퀴 회전하고, 반 시계 방향으로는 3바퀴 회전한다. 역시 3, 5, 8도 피보나치 수들이다. 위의 식물에 대해서는 잎당 시계 방향으로 3/5바퀴라고 하면 두번째 식물은 잎당 5/8바퀴가 된다.



<그림3> 잎의 배열

잎이 생겨나는 잎차례 비율이 피보나치의 수로 나타나는 식물의 예를 들면 다음과 같다[1].

<표 2> 잎차례 비율과 피보나치의 수

| 비율 | 식 물 들 |
|---|---|
| 2/3 | 화분과의 풀, 느릅나무 |
| 1/3 | 너도밤나무, 개암나무, 검은 딸기 |
| 2/5 | 참나무, 벚나무, 사과나무, 서양자두나무, 겨자나무, 살구나무 |
| 3/8 | 포플러나무, 장미, 배나무. 가지가 늘어지는 수양버들 |
| 5/13 | 갯버들, 아몬드, 쇠뜨기 |

줄기가 긴 나무들은 나무의 밑둥에서 잎이 생겨나는 비율에 맞게 잎들이 생겨나고 줄기 위쪽에서는 또 다른 비율로 잎들이 생겨나는데, 새로운 비율의 분자, 분모 역시 피보나치 수들로 구성되어 있다.

## 나. 꽃잎의 수와 꽃씨의 배열

### (1) 꽃잎의 수

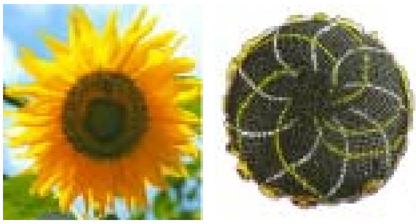
많은 꽃은 그들의 싹이나 씨 뿐만 아니라 꽃잎의 수에 있어서도 피보나치 수를 보여주고 있다. 솔잎은 종류에 따라 2개, 3개, 또는 5개의 솔잎으로 된 송이로 자라는 경향이 있으며, 백합과 아이리스, 붓꽃은 3장을, 미나리아재비는 5장의 꽃잎을 갖는다. 또 코스모스는 8장을, 금잔화는 13장을, 과꽃은 21장을 가지며, 데이지 꽃은 34, 55 또는 89장의 꽃잎을 가지기도 한다. 직접 들에 나가 여러 가지 꽃들의 꽃잎을 세어 보면, 어떤 종들은 꽃잎의 수가 매우 정확하게 나타나지만 그렇지 않은 것들도 많다. 그러나 꽃잎의 수를 세어 평균적으로 나타내어 보면 다음과 같이 피보나치 수가 나타남을 알게 될 것이다[10].

<표 3> 꽃잎의 수와 피보나치 수

| 꽃잎의 수 | 식 물 들 |
|---|---|
| 2 | 마법의 가지과의 식물 |
| 3 | 백합, 아이리스, 붓꽃 |
| 5 | 도로가의 상추, 미나리아재비, 야생의 장미, 참제비고깔속 |
| 8 | 코스모스, 참제비고깔, 뿌리가 붉은 양귀비과 식물 |
| 13 | 금불초, 금잔화, 시네라리아, 이중 참제비고깔 |
| 21 | 애스터, 검은 눈의 수산, 치커리 |
| 34 | 야생 데이지, 질경이, 제충국 |
| 55 | 아프리카 데이지, 갯개미취 |
| 89 | 갯개미취 |

### (2) 꽃씨의 배열

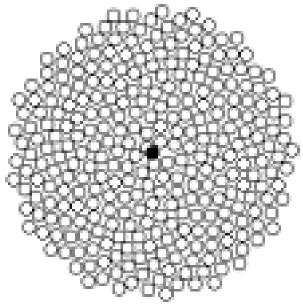
꽃술의 씨의 배열에서도 피보나치 수열을 찾을 수 있다. 우리 주변에서 흔히 볼 수 있는 해바라기 꽃과 데이지 꽃은 <그림 4>와 <그림 5>에서 보이는 것처럼 씨의 배열 형태가 거의 같다.



<그림 4> 해바라기 꽃과 꽃씨

<그림 5> 데이지 꽃과 꽃씨

<그림 4>과 <그림 5>에서 보는 바와 같이 꽃의 씨들이 왼쪽으로 돌아나가는 것과 오른쪽으로 돌아나가는 것 모두 나선형을 이루고 있다. <그림 6>은 위의 꽃씨를 확대한 모습을 그려놓은 것이다. 가장자리에서 오른쪽을 향하는 나선을 세어보면 34이고 왼쪽으로는 21개의 나선이 있다. 이 두 수들은 피보나치 수열에서 이웃하는 수이다.



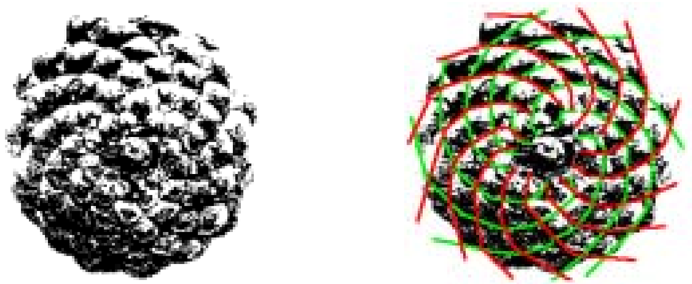
<그림 6> 확대한 꽃씨

자연속에 존재하는 실제의 씨앗에서도 식물의 종류에 따라 다르지만, 나선의 수가 34와 55, 55와 89, 89와 144 등의 연속하는 피보나치 숫자가 쌍의 형태로 나타난다. 그리고 씨앗들은 모두 같은 크기이며 중심에서 더 밀집해 있거나 가장자리에서 드물게 보이거나 하지 않는다. 그 이유는 씨앗들이 크기에 상관없이 균일하게 쌓이는데 최적인 형태인 것으로 보인다.

## 다. 솔방울과 식물의 가지

### (1) 솔방울

솔방울은 피보나치 나선형을 분명히 보여준다. <그림 7>의 오른쪽은 솔방울의 나선을 강조해서 나타낸 것이다. 시계 반대 방향의 나선과 시계 방향의 나선은 각각 같은 방향으로의 나선들을 나타내고 있다. 솔방울의 특성을 나타내는 나선형들은 피보나치 비율의 보다 명백한 예가 되곤 한다.



<그림 7> 솔방울과 솔방울의 나선

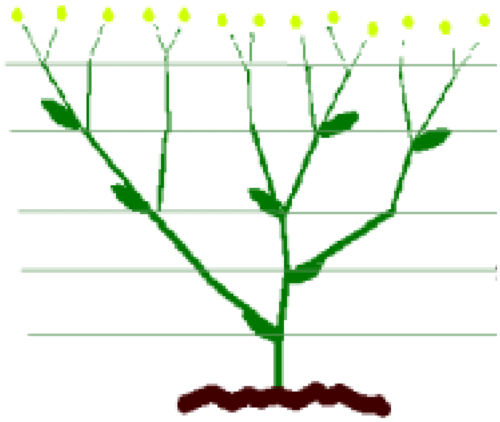
솔방울의 표면을 덮고 있는 잎들은 서로 압축되어 개조된 잎들로 생각할 수 있다. 그것들은 줄기에 둘러 있는 잎들처럼 솔방울을 나선형으로 둘러싸고 있는데, 오른쪽 그림에서 보는 것처럼 두 종류의 나선형을 볼 수 있다. 오른쪽 솔방울은 시계방향으로 8개의 나선이 왼쪽 아래에서 오른쪽 위로 대각선 방향으로 천천히 가고, 시계 반대 방향으로 13개의 나선이 오른쪽 아래에서 왼쪽 위로 대각선 방향으로 보다 급하게 가로질러 가고 있다.

어떤 솔방울들은 3개의 완만한 나선형과 5개의 급한 나선형을 가지고 있다. 다른 것들은 5개의 완만한 나선형과 8개의 급한 나선형을 가지고 있거나, 또는 완만한 것 8개와 급한 것 13개를 가진 것들도 있다. 이처럼 세 가지의 서로 다른 나선형을 가진 솔방울들은 모두 피보나치 수와 밀접한 관계를 가지고 있음을 보여주고 있다. 연구 결과, 솔방울들의 나선형 수는 99% 정도는 피보나치 수열의 수로 나타난다는 사실이 밝혀지고 있다[10].

### (2) 식물의 가지

특별한 어떤 식물은 생장점의 수에서 피보나치 수가 나타난다. 식물이 새로운 가지를 뻗을 때, 그 가지는 두 달을 자라야 분지를 지탱할 만큼 충분히 강해진다고 가정하자. 그 후로는 매달 생장점에서 가지를 뻗는다고 하면, 다음에서 보여지는 것과 같은 그림을 얻게 된다.

처음에 한 가지가 두 개로 나뉘어진다. 이들 두 가지 중 새로 뻗은 가지가 다시 두 개로 나뉘어지는 동안 다른 것은 나뉘어지지 않고 있다. 한 가지가 두 개로 나뉘는 동안 다른 가지가 쉬는, 이러한 현상은 각 가지가 생길 때마다 반복된다. 이때 수평 방향에 있는 가지의 수는 피보나치 수를 이루는데, 이러한 과정은 제한된 환경적인 영향을 필요로 하는 것이어서 완벽한 실례를 찾기는 힘들다. 그러나 물속 말류들이나 뿌리 구조 속에서 이러한 패턴이 나타나기도 한다.



<그림 8> 식물의 가지

또 <그림 8>와 같은 패턴은 식물뿐만 아니라 동물의 예에서도 찾을 수 있는데, 다음에서 살펴보려는 ‘꿀벌의 가계’가 바로 그것이다. 꿀벌들은 독특한 면을 가지고 있으며, 바로 이 꿀벌의 가계에서도 피보나치 수를 찾을 수 있다.

## 라. 꿀벌의 가계

① 꿀벌 모두가 두 명의 부모를 갖는 것은 아니다.
② 벌떼 중에는 여왕벌이라 불리는 특별한 암컷이 있다.

③ 여왕벌이 아닌 많은 암컷 일벌들이 있다. 그들은 알을 낳지 못한다.

④ 일을 하지 않는 수펄들은 수정되지 않는 알에서 태어나기 때문에 어미만 있고 아비는 없다.

⑤ 암펄은 여왕벌이 수펄과 짝지어 태어난다. 모든 암펄은 두 명의 부모를 갖게 되며 대부분 일벌이 된다. 그러나 몇몇은 여왕벌로 자라게 되는데, 이들은 새 보금자리를 지을 장소를 찾아 새로운 벌떼를 이루게 된다. 그러므로 암펄은 어미, 아비 두 명의 부모를 갖지만, 수펄은 단지 어미만을 갖는다.

한편, 일하지 않는 수펄의 가계를 살펴보자.

① 어미만을 갖는다.

② 2명의 조부모를 갖는데, 어미는 2명의 부모, 암펄과 수펄 부모를 갖기 때문이다.

③ 3명의 증조부모를 갖는다. 그의 할머니가 2명의 부모를 갖고, 그의 할아버지는 어미만을 갖기 때문이다.

위의 수펄의 가계를 참고로 하여 꿀벌의 조상의 수에 대한 표는 다음과 같다.

<표 4> 꿀벌의 조상의 수

| 구분 | 부모 | 조부모 | 증조부모 | 고조부모 | 5대조부모 | 6대조부모 | 7대조부모 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 수펄 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 |
| 암펄 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 |

동물의 세계에서 피보나치 수열을 보여주는 다른 예로써 동물의 성장을 보여주는 나선 곡선이 있는데 이는 황금분할에서 살펴보기로 한다. 자연에서의 피보나치 수열의 발생은 결코 끝나지 않을 것 같다. 눈송이의 구조와 식물의 열매의 방의 수는 피보나치 수를 나타낸다. 또 솔방울이 피보나치수의 배열 형태를 띠는 것처럼 전자현미경으로 관찰하면 단위 단백질은 단세포 유기체의 꼬리를 유영하면서 나선형으로 둘러싼다.

## 2. 예술속의 피보나치 수열

### 가. 황금사각형과 황금나선구조

#### (1) 황금분할

피보나치 수열의 성질에서 살펴본 바와 같이 연속하는 두 피보나치의 수 중 큰 수에 대한 작은 수의 비율, 즉 $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{13}{21}, \frac{55}{89}, \cdots$는 점점 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$(약 0.618)에 가까워지고, 작은 수에 대한 큰 수의 비율, 즉 $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}, \frac{21}{13}, \frac{89}{55}, \cdots$는 점점 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$(약 1.618)에 가까워지는데, 0.618 또는 1.618이 '황금비(golden ratio)'이다.

선분을 황금비로 나누는 것을 '황금분할(golden section)'이라고 하는데, 이는 한 선분을 두 부분으로 나눌 때에 전체에 대한 긴 부분의 비와 긴 부분에 대한 짧은 부분의 비가 같게 되는 분할을 말한다. 황금 분할된 선분에서 (긴 길이):(짧은 길이)=1:0.618 ; (짧은 길이):(긴 길이)=1:1.618이 된다.

그러므로 황금분할이라 함은 전체 속에서 두 개의 크기가 다른 부분 사이의 독특한 상호 관계이며 황금분할이란 용어는 이 비율관계의 절묘함에서 나온 말이다.

인간의 시각에서 볼 때 황금비를 응용하여 만든 물건, 건축물 등은 다른 비율을 사용해 만든 것에 비해 가장 안정적으로 느껴진다. 심지어 아름답다고 느껴지는 몸매를 가진 팔등신의 여인들도 그들의 몸 전체에서 배꼽의 위치가 발바닥에서부터 정확히 몸 전체의 61.8%에 해당된다[4]. 황금비가 인간에게 호감과 조화감을 준다는 사실은 고대부터 인정된 사실이다.

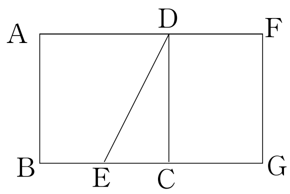
황금비가 왜 인간에게 호감과 조화감을 주는지 아직 과학적으로 정확히 설명이 안되고 있지만, 분명히 황금비에는 인간의 심리에 영향을 미치는 보이지 않는 질서가 있을 것이다.

그러기에 ‘모든 것의 근원은 수’라고 생각했던 피타고라스 학파의 사람들은 황금비를 단순한 숫자로 생각하기보다는 신성한 상징으로 인식했다[22]. 그들은 황금분할의 비율이 내재된 오각형 별을 학파의 상징으로 삼고 자신의 특성을 보존하면서 전체의 더 큰 형태에 융화되는 황금분할의 특징처럼 구성원들이 검소한 생활을 하며 사회적으로 의료시술 등의 봉사활동을 하는 등 전체사회 구성원으로서 자신의 위치를 조화시켜 나의 위치를 조화시켜 나갔다고 한다.


<그림 9> 오각형별

(2) 황금비가 내재된 황금사각형

황금분할이 나타내는 현상과 그 의미하는 것을 이해하려면 황금분할 구도가 내재된 직사각형을 이해하여야 한다.




황금분할 구도가 내재된 직사각형은 다음의 방법으로 작도할 수 있다[4].

① 그림과 같이 길이가 2인 정사각형 ABCD를 작도한다.

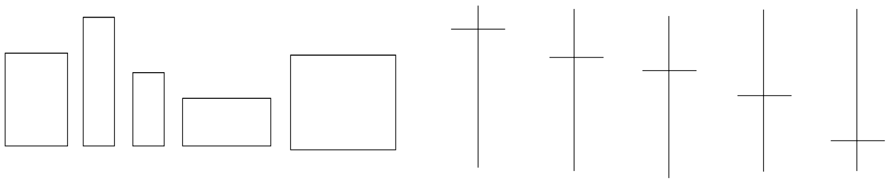
② 밑변 BC의 중점을 E라 하고 선분 DE를 이으면 밑변1, 높이 2, 빗변 $\sqrt{5}$인 직각삼각형 DEC가 만들어진다.

③선분 EG의 길이가 DE의 길이와 같도록 연장하여 직사각형을 완성한다.

그러면 $\overline{FG}/\overline{BG}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 이고, $\overline{CG}/\overline{FG}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 가 되는데, 이 때 직사각형 ABGF와 직사각형 CGFD를 ‘황금사각형(golden rectangle)’이라 한다.

실험에 의하면 사람들에게 무작위로 여러 가지의 사각형 모형을 제시하고 그 중에서 그들의 눈에 가장 안정적으로 느껴지거나 또는 눈에 제일 먼저 들어오는 사각형을 고르라면 대개의 사람들은 황금비가 내재된 직사각형을

고른다. 또 두 개의 막대기를 주고 십자가를 만들어 보라 하면 대부분 사람들은 황금분할의 점에 근사한 곳을 교차해 십자가를 만든다.



<그림 10> 사각형 고르기와 십자가 만들기[13]

인간들의 황금분할에 대한 선호는 우리 생활 주변의 여러 상품들에 널리 사용되는 결과를 보여주고 있다. 액자, 창문, 책, 십자가, 신용카드 등의 가로, 세로 비율 등에 황금비가 적용된다. 특히 신용카드의 비율을 예로 들면 신용카드의 가로, 세로의 길이는 각각 8.6cm와 5.35cm이고, 이 둘의 비율은 1.607로 황금비에 의해 카드가 제작되었다는 사실을 보여주고 있다.

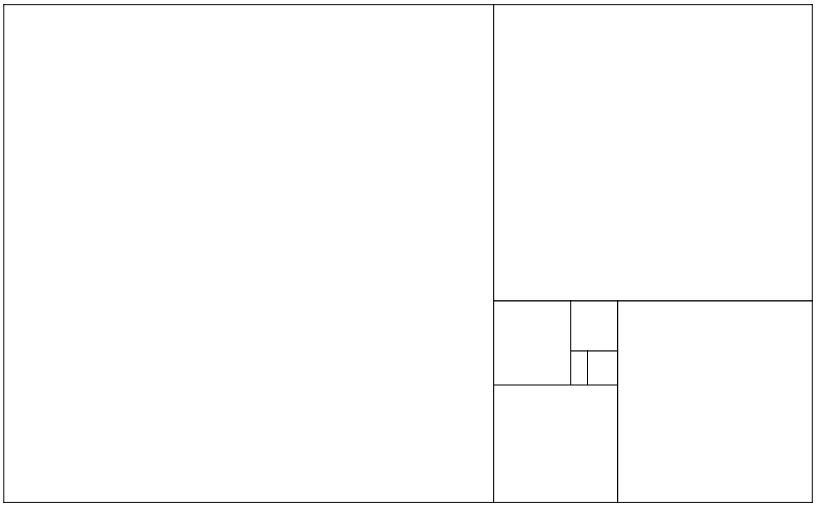
이미 열거한 예를 통해 느끼겠지만 황금비는 인간이 느끼는 가장 안정적이며, 편하게 느껴지는 요소를 내재하고 있다. 바꾸어 말하면 인간의 행위 또는 행동양식은 그것이 의식적이건 무의식적이건 어느 정도 영향을 미치며 그것들을 규정하는 요소가 황금비에 내재되어 있다고 결론지을 수도 있다.

### (3) 황금나선구조

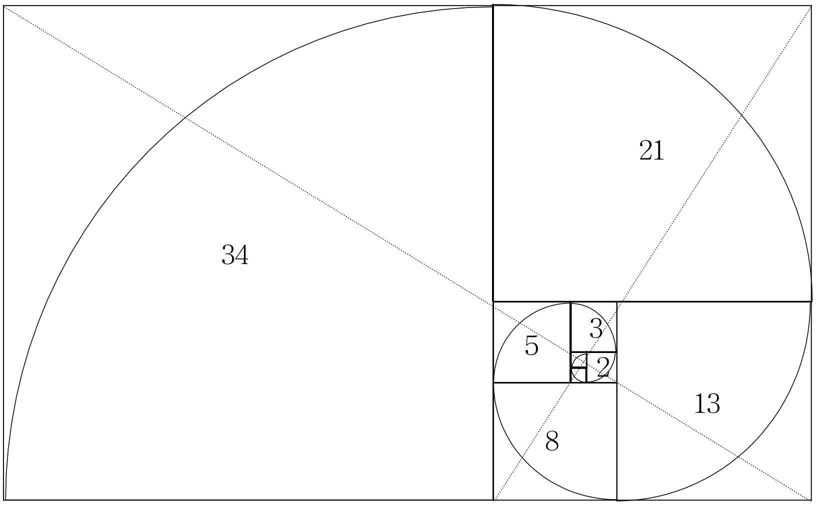
황금분할의 구조는 인간이 만든 특정 조형물이나 자연의 주어진 정적인 상태에 대한 심미적 분석에 유용하나 동적인 상태의 분석에는 한계가 있다. 자연의 동적인 상태, 즉 성장, 발전, 진행 등을 황금분할의 관점에서 분석하기 위해서는 황금나선구조의 이해가 필수적이다.

황금사각형의 한 쪽 끝에서 작은 변을 한 변으로 하는 정사각형을 잘라내면, 남아있는 사각형은 역시 황금비를 내재한 황금사각형이 된다. 만약 남은 이 사각형에서 또 정사각형을 잘라내면 남은 사각형 역시 황금사각형이 되며, 이러한 과정은 끝없이 반복될 수 있는데 다음 그림이 바로 그것이다.

<그림 11> 황금사각형속의 황금사각형



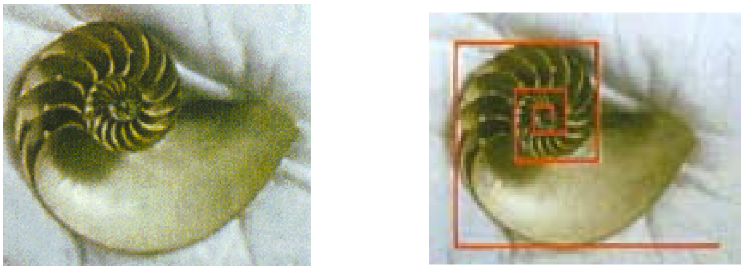
이 황금사각형의 가장 작은 정사각형을 중심으로 1/4원(호)를 그려 나가면 <그림 12>와 같은 나선형구조의 호들이 연결된 형태를 보여줄 것이다. 이 호들의 연결된 형태를 '황금나선(golden spiral)'이라 하며 그 진행은 무한대로 뻗어나갈 수 있다. 이 황금 나선의 연결된 각 호들의 상호비율을 측정해 보면 황금비가 내재하고 있는 사실을 쉽게 알 수 있다.



<그림 12> 황금나선구조

이렇게 만들어진 것은 등각 나선 또는 대수형 나선이라고 불리는데 거의 완벽에 가까운 아름다운 곡선이다. 이 특유한 나선을 이루는 정사각형의 변의 길이가 피보나치 수열을 이룬다. 등각 나선이라고 불리는 이유는 그것의 중심으로부터 나온 반지름은 이 나선을 똑같은 각도로 자르기 때문이다.

등각 나선의 가장 선명한 예는 앵무조개의 껍질이다. 앵무조개가 자라면서 그것이 사는 방은 더 커질 필요가 있고, 그것에 더하여 몸의 윤곽을 유지하기 위하여 같은 형태로 있게 된다. 이 앵무조개의 단면이 어떻게 이루어지는가는 아래 그림을 보면 알 수 있다. 앵무조개가 자라면서 껍질의 반경도 커지나, 반경과 앵무조개의 교차각은 같은 각으로 유지된다. 그러므로 앵무조개의 방은 비슷한 모양을 가지면서 더 크게 된다.



<그림 13> 앵무조개에 나타나는 등각나선

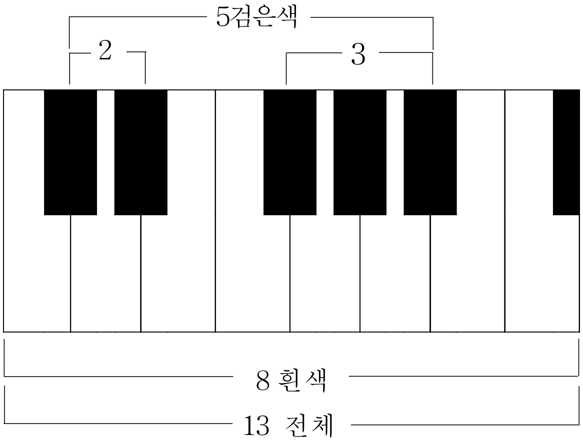
등각 나선들은 동물의 세계에서도 찾을 수 있다. 예를 들면 양의 뿔, 거미줄, 새의 부리, 고양이와 카나리아의 발톱, 상아, 박테리아의 성장 도표, 그리고 빛에 가까이 가는 곤충의 궤적이다. 대부분의 이런 일은 기본적으로 나선의 특징과 관계가 있다. 즉, 일정한 형태를 유지하면서 커진다[14].

<그림 14> 자연에서 찾을 수 있는 등각나선의 예

## 나. 음악에의 응용

### (1) 피아노 건반

피보나치 수열과 음악 사이의 명백한 연관 관계는 피아노의 건반에서 잘 나타난다. 피아노 건반에서 한 옥타브는 8개의 흰 키와 5개의 검은 키로 이루어져 있다. 검은 키는 2개 또는 3개의 묶음으로 이루어져 있다. 한 옥타브에는 모두 13개의 키들이 있고, 다음처럼 피보나치 수가 나타난다[12].




<그림 15> 피아노 건반에 나타나는 피보나치 수

### (2) 음계

13개의 키는 반음계(chromatic scale)를 이루는데, 반음계는 서양음악에서 가장 완전한 음계로 알려져 있다[6]. 최초의 음계는 5개로 이루어진 5음계였고, 그 이후에는 흔히 옥타브로 더 잘 알려진 8개의 키의 온음계(diatonic scale)가 발달하였다. 5음계는 초기 유럽 음악에 쓰였었고, 현재에는 미국에서 아동을 위한 코다이식(Kodly method) 음악교육의 기초가 되고 있다. 피아노 건반에서 연이어지는 어떠한 5개의 검은 키들도 5음계를 이룰 수 있

다. 미국 동요 중 여러 곡은 그 건반들만을 이용해서 연주할 수 있다. 한편, 우리의 고유 음계인 중(솔), 임(라), 무(도), 황(레), 태(미)를 사용하는 대다수의 민요도 여기에 해당된다. 여러 다른 음계들이 존재했지만 5음계(5), 온음계(8), 그리고 반음계(13)는 음악 발전 과정의 대부분을 차지하고 있다.

<표 5> 5음계, 8음계, 13음계를 사용한 음악

| 음 계 | 5음계 | 8음계 | 13음계 |
|---|---|---|---|
| 곡 명 | 아리랑<br>정선아리랑<br>한오백년<br>도라지 | 나뭇잎배<br>파란마음 하얀마음<br>님이 오시는지<br>산들바람 | 그리운 금강산<br>로망스<br>사랑으로<br>산들바람 |

(3) 음정

많은 사람들에게 기분 좋게 들리는 음정은 장6도와 단6도로 알려져 있다[12]. 장6도 음정의 예를 들면, 1초에 약 264번 진동하는 ‘도’음과 1초에 약 440번 진동하는 ‘라’음으로 이루어진다. $\frac{264}{440}$의 비를 약분하면 피보나치의 비인 $\frac{3}{5}$이 된다. 단6도 음정의 한 예는 1초에 약 330번 진동하는 ‘솔’음과 1초에 약 528번 진동하는 ‘도’음이 있는데 $\frac{330}{528}$의 비를 약분하면 그 다음 피보나치의 비인 $\frac{5}{8}$가 된다. 어떤 6도 음정의 진동수의 비도 비슷한 비로 약분이 된다. 이런 것들로 인해 피보나치의 수들이 눈에 아름답게 보이는 것뿐만 아니라, 귀에도 아름답게 들리는 자연적인 조화의 일부로 알려져 있다. 아마도 이런 이유 때문에 작곡가들은, 의식적으로든 무의식적으로든, 그들의 작품에 피보나치의 수들과 비를 이용해 왔을 것이다.

(4) 작곡의 기법

피보나치 수들은 음악 작곡에 있어서 매우 다양한 기능을 한다. 그 중 가장 중요한 것은 아마도 곡의 연주 시간을 피보나치 수의 비율, 즉 황금비율을 이루는 단계로 나누는 것이다. 음악의 전체적인 클라이막스나 템포의 변환점, 음색의 변환점 등과 황금분할 지점(golden section point)이 일치하게 함으로써, 음악의 극적인 표현의 질을 결정하고 전달하는데 영향을 준다는 점에서 피보나치 비는 음악에서 중요한 역할을 하는 것이다. 이것을 하는 한 가지 방법은 박자들을 묶는 데 피보나치 수들을 이용하는 것이다[5].

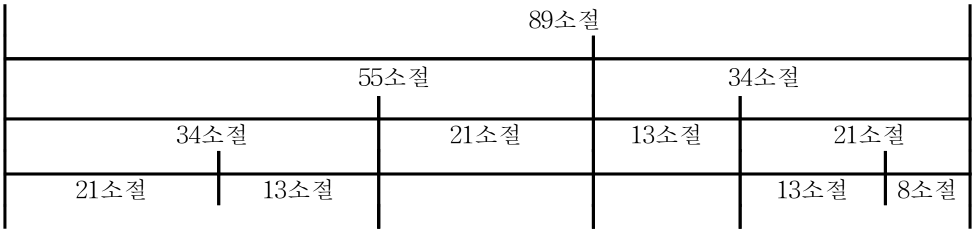
전 곡

| | | |
|---|---|---|
| 34소절 | 55소절 | 34소절 |

| | | |
|---|---|---|
| 주제가(추선율) | 느리고, 부드럽게 | 빠르고, 크게 |

<그림 16> 음악의 연주시간에 적용된 피보나치의 비

이 기법은 초기의 교회 음악에서 현대 음악까지, 바흐, 베토벤, 그리고 바로토크를 포함하는 여러 작곡가들의 작품에 나타나 있음을 연구 자료에서 찾을 수 있다. 음악의 연주 시간을 피보나치의 비로 나눈 한 예로써 바로토크의 현악기, 타악기, 첼레스타(Celeste, 피아노와 비슷한 종소리를 내는 악기)를 위한 음악의 첫 악장으로 다음 그림에 도표화하여 소개하였다[8].




<그림 17> 바로토크의 현악기, 타악기, 첼레스타를 위한 음악의 1악장

이처럼 곡 중 전체적인 비율에 있어서 소주제의 시작과 끝, 분위기와 느낌을 결정하기 위하여 여러 작곡가들이 곡의 각 단계의 길이를 피보나치의 비로 나누어 주었음을 알 수 있다.

여러 작곡가들은 주로 피보나치 수열의 처음 몇 개만 음악에 적용했는데, 그 이유는 피보나치 수열이 너무 빨리 큰 수로 변하기 때문이었다. 어떤 작곡가는 일부러 파격적인(전위적인) 효과를 내기 위해 큰 피보나치 수의 간격을 이용했다고도 하지만, 일반적으로 피보나치 수들은 음악에서 독특하거나 특이한 박자를 만드는 데는 거의 사용되지 않는다. 리듬이나 멜로디에 있어서나 아니면 전체적인 비율에 있어서 청취자들은 곡을 들으면서 피보나치 수들을 거의 인식하지 못한다. 청취자들은 그 곡에서 안정된 느낌을 받거나 흥미를 끄는 곡의 변형을 찾아내거나 전체적인 곡에서 적절하다는 느낌을 받을 것이다. 이런 효과를 위하여도 피보나치 수들이 이용된다.

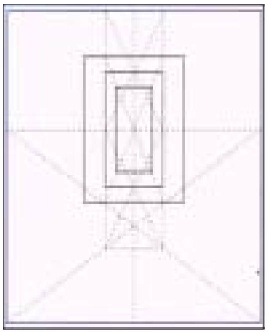
### 다. 미술과 건축에의 응용

건축에서 황금사각형을 사용했음을 나타내는 증거는 역사를 통해 세계 여러 곳에서 발견된다. 피라미드가 건축된 지 1,400년 후 이집트에 세워진 람세스 4세의 무덤에서는 내부에는 큰 사각형 안에 중간 사각형이, 또 그 안에 작은 사각형이 들어 있는 모양으로 있는데, 작은 것은 정사각형을 두 개 나란히 붙여놓은 모양을, 중간 사각형은 황금사각형 모양을, 큰 사각형은 황금사각형을 두 개를 붙여 놓은 모양을 하고 있다[4].

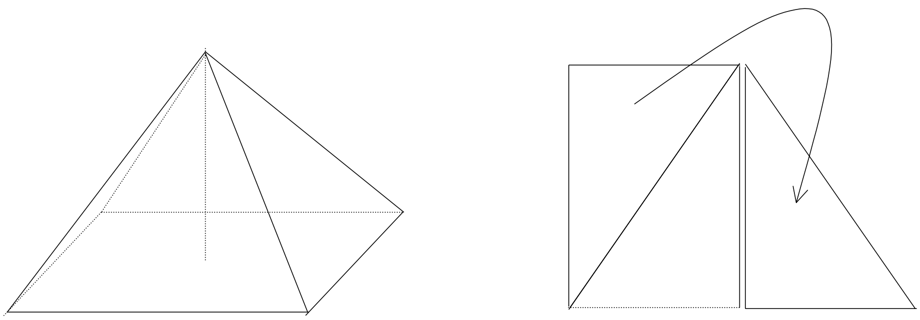
B.C. 400년경에 건조된 아테네의 파르테논 신전에서 외부규격(치수)은 정확히 황금사각형을 나타내고 있으며, 파라테논 신전의 기둥들의 위 부분에 있는 일련의 조각품 속에서도 황금사각형을 찾을 수 있다.

피라미드 중에서 가장 크고 완전한 것으로는 기제(Gizeh)의 것을 들 수 있다. 이 피라미드의 진가는 장대한 규모에 있는 것이 아니라, 거대한 규모의 건축물임에도 불구하고 가로-세로-높이의 비율이 무척 안정적인 구도로 되어 있다는 점에 있다[9]. 이 피라미드에서 높이와 정사각형 밑면의 한 변

에 대한 비는 5:8 또는 0.625이다. 더욱이 옆면 삼각형은 황금사각형을 대각선을 따라 자른 후 다시 이 사각형의 긴 변을 겹쳐 결합시킨 삼각형이다.

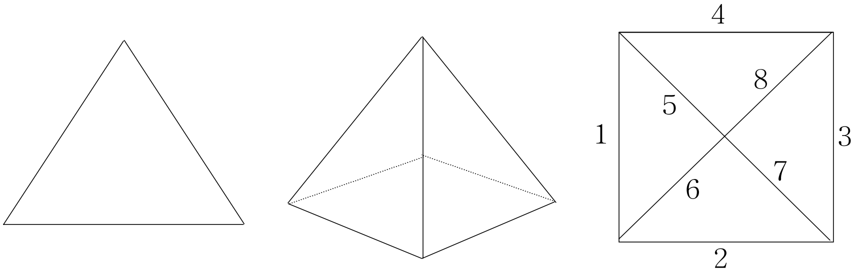


<그림 18> 람세스 4세의 무덤의 내부와 파르테논 신전



<그림 19> 기제의 피라미드에서 옆면의 삼각형

흥미롭게도 오늘날 이 피라미드의 밑면의 넓이는 13(헥타아르) 또는 8(에이크)로 알려져 있는데, 헥타아르와 에이크는 오늘날 가장 널리 사용되는 땅의 넓이 측량단위체계 중 하나이다[3]. 또 평지에서 피라미드를 어느 쪽에서 보더라도 오직 '3'개의 선만이 보일 뿐이며, 피라미드보다 높은 위치에서 피라미드를 보게 되면 모두 '5'개의 선이 보이게 되고, 또 하늘 높은 데서 피라미드를 내려다보면 모두 '8'개의 선이 나타나게 된다. 여기에도 피보나치의 숫자들이 살아 숨쉬고 있는 것이다[3].




수평으로 본 모양 위에서 비스듬히 본 모양 정중앙에서 내려다본 모양

<그림 20> 각 방향에서 바라본 피라미드의 모양

황금비를 '피(phi)'라고 부르는 것은 그리이스의 가장 유명한 조각가였던 피디아스(Phidias)때문인데, 이 황금비는 위에서 제시한 파라테논 신전의 기둥들의 윗부분에 있는 일련의 조각품을 포함한 그의 여러 작품들 속에서 풍부하게 나타나고 있다[4].

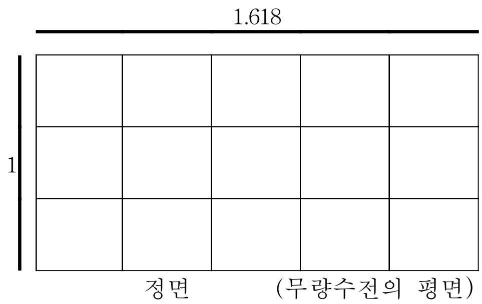
또 레오나르도 다빈치가 '신의 비'라 이름을 붙인 황금비는 여러 명화에서 볼 수 있는데 황금사각형 그 자체가 그림, 조각품 속에서 자주 발견된다.

지오토의 마돈나 우리 나라의 석굴암 그리이스의 물항아리

<그림 21> 황금사각형이 들어있는 여러 예술품

우리 나라에는 '배흘림 기둥'이라는 오래된 전통 건축 양식이 있는데, 이 양식으로 지어진 대표적인 건물은 고려 중엽에 세워진 부석사 무량수전으

로, 평면에는 1:1.618의 황금비가 적용되어 아름다움을 자아낸다. 또 무위사의 극락전, 화엄사의 대웅전 등에서도 이런 기둥을 볼 수 있다.




<그림 22> 무량수전의 평면구도

무량수전은 겉에서 보면 정면 5칸, 측면 3칸으로 지어져 있는 3:5의 비율임을 알 수 있다. 건물의 실제 비율은 1:1.618의 황금비라고 한다[13].

르네상스 시대의 예술과 건축은 그리이스의 미와 비율에 대한 감각에서 영감을 받아 황금비를 적용했는데, 대량생산의 시대에 쏟아져 나온 많은 건물, 동상 및 예술품 같은 것들이 황금비를 특징적으로 나타내는 것은 당연한 것인지 모른다. 우리가 생활하고 있는 곳의 주위를 살펴 보라. 건물 등의 복도, 바닥 기초 공사,  창문, 문 등 거의 모든 곳에서 이 황금비 또는 황금사각형을 찾을 수 있을 것이다.

# 4장　정보화 사회의 피보나치 수열

1200년에 피보나치 수열이 만들어지던 당시로서는 전혀 예측할 수 없었던 분야로서, 컴퓨터와 증권을 생각 할 수 있다. 수학의 생명력은 그 당시 어떻게 이용되는가에 있지 않다고 강변한 힐버트(D.Hilbert)의 말처럼, 지금은 전혀 응용성이 보이지 않는 것처럼 느껴지는 것도 미래에는 충분히 응용될 수 있다. 그 하나의 예로서 피보나치 수열은 역시 그 빛을 발하고 있다. 수학을 순수수학과 응용수학으로 양분하는 오류를 범하지 않아야 할 중요한 예가 되기도 한다.

## 1. 컴퓨터 검색에의 응용

컴퓨터 검색(Computer Searching)이란 컴퓨터의 기억 공간에 보관된 자료들 중에서 어떠한 성질을 만족하는 것들을 찾아내는 일을 말한다. 그러나 검색을 하기에 앞서 꼭 선행되어야 할 두 가지가 있다. 한 가지는 검색의 대상인 자료를 적절한 구조로 기억 공간에 표현해야 한다는 것이고 다른 하나는 표현된 자료들 중 원하는 것을 찾는 적절한 방법을 선택해야 한다는 것이다. 이 두 가지 전제 조건은 검색 방법에 따라 자료 구조를 선택하거나 반대로 자료 구조에 따라 적당한 검색 방법을 결정할 수 있으므로 서로 상대적인 관계가 있다[22].

따라서 어떤 성질을 만족하는 자료를 빨리 찾아내려면 첫째, 효율적인 검색 방법을 찾아야 하고, 둘째, 나쁜 검색은 프로그램의 시행 시간을 많이 차지하므로 성능이 좋은 검색 방법을 선택하여 프로그램의 실행 시간을 짧게 해야 한다.

검색 방법은 기억 장소와 키(Key)값의 이용 형태에 따라 각각 두 가지로 분류할 수 있다.

먼저 기억장소에 따라 내부 검색(Internal searching)과 외부 검색(External searching)으로 분류할 수 있는데, 내부 검색은 기억 장치 안에 기억된 데이터 중에서 필요한 데이터를 찾는 것으로 적은 양의 자료 검색시 유리하며 처리 속도가 빠르다. 또 외부 검색은 보조 기억 장치에 기억된 데이터 중에서 필요한 데이터를 찾는 것으로 많은 양의 자료 검색시 시용하며 처리 속도가 느리다.

키(Key)값을 이용할 때에는 키 값 비교를 이용한 검색과 키 값의 계수적 성질을 이용한 검색으로 분류할 수 있는데, 후자에는 키 값에서 레코드가 저장되어 있는 주소를 직접 계산한 후 산출된 주소로 곧바로 접근이 가능하게 하는 해싱(hashing)이 있다. 한편, 전자는 레코드들의 키를 비교하면서 특정 레코드를 찾는 방법으로 선형(순차) 검색, 블록 검색, 제어 검색(이진 트리 검색, 피보나치 검색, 보간 검색)으로 세분된다.

제어 검색(Controlled Searching)은 한 번 비교 동작이 끝난 후 다음에 비교할 대상을 선택하는 기준으로 이용하는 검색 방법으로 주어진 파일 내의 레코드들이 일정한 순서로 배열된 순서화된 파일에서 특정 레코드를 검색한다.

이 방법으로 검색하려면 반드시 데이터가 정렬되어 있어야 하고, 주어진 키와 표의 키를 비교한 후, 그 결과가 같은지 같지 않은지에 따라서 다음에 비교할 자료를 선택한다.

제어 검색에는 이분(이진) 검색, 피보나치 검색, 보간 검색 등이 있는데 이 중 피보나치 검색을 살펴보기로 하자.

피보나치 검색(Fibonacci searching)은 비교 대상을 피보나치 수열에 의해 결정하여 검색하는 방법으로, 비교 후 결과에 따라 피보나치 수열에 의해 다음에 비교할 대상을 선정하여 검색한다. 이 검색 방법을 이용하려면 레코드들이 키 값에 따라서 정렬되어 있어야 하며 많은 자료에서 검색할 때 효율적이다. 이 방법은 덧셈이나 뺄셈만으로 검색이 가능하며 무엇보다도 초기 자료가 피보나치 수열화 되어 있어야 한다는 것이다.

## 2. 주식시장에서의 피보나치 수열

피보나치 수열이 만들어진 당시는 물론이고 불과 수십 년 전 까지만 해도 일반인들이 잘 알 수 없었던 피보나치 수열의 응용분야로서 주식시장을 생각해본다.

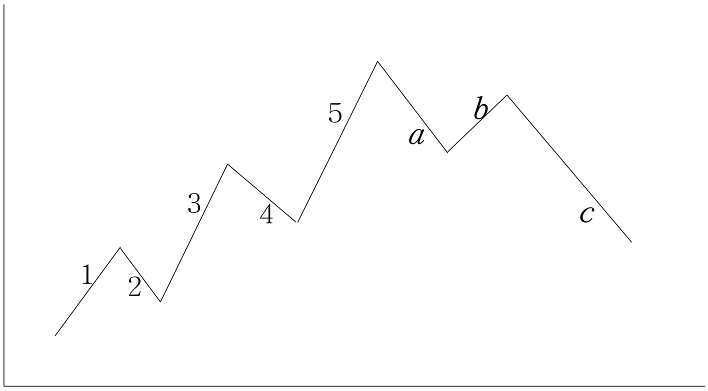
주식시장에서 시장의 가격을 정확히 예측하는 것은 모든 투자자들의 소망일 것이다. 이 주식시장의 움직임을 피보나치 수열을 도입하여 미리 예측할 수 있는데, 주식시장의 움직임과 피보나치 수열의 관련성을 처음 주장한 사람이 바로 랄프 넬슨 엘리어트(Ralph Nelson Elliott)이다.

1930년대 중반, 미국이 대공항에서 빠져나가기 시작할 무렵, 엘리어트는 다우 존스 주가지수의 역사와 변화를 연구하는데 많은 시간을 보냈다. 엘리어트는, 우리가 그 이유를 정확히는 알 수 없으나, 우리를 둘러싼 우주 또는 삼라만상을 움직이는 어떤 법칙이 존재하고 있음을 경험으로 알 수 있다고 하였다[3]. 해가 지고 해가 뜨며, 사계절의 변화, 밤과 낮의 변화 등이 질서 있게 나타나는 것은 이러한 삼라만상을 움직이는 법칙이 없고서야 불가능한 일인 것이다. 그리고 우리들의 주된 관심사가 되는 주식 시장에서의 주가도 인간에 의하여 움직여지고 또한 삼라만상을 구성하는 일부분이 되므로, 당연히 우주 또는 삼라만상을 지배하는 법칙이 주식 시장에도 적용될 것임은 틀림없는 사실일 거라 생각했던 것이다.

엘리어트는 단순히 경험적·직관적으로 주식 시장의 움직임을 지배하는 법칙을 발견한 것이 아니라, 과거 75년 동안의 방대한 주가 움직임을 월간, 주간, 일간, 시간, 심지어는 30분 단위까지의 세밀한 자료들로 모아서 오랜 시간 연구 검토한 끝에 주식시장의 주가 움직임에 대한 법칙, 즉 엘리어트 파동 이론(Elliott Wave Principle)을 탄생시켰다.

## 가. 엘리어트 파동의 패턴(pattern)

다음 그림은 엘리어트가 발견한 기본적인 파동의 패턴이다[3].




<그림 23> 엘리어트의 기본적인 파동 패턴

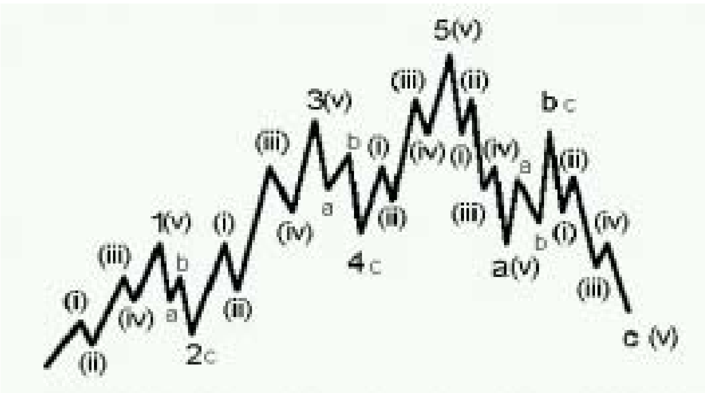
엘리어트의 기본적인 파동 패턴의 한 사이클은 상승 국면의 5개의 파동과 하락 국면의 3개의 파동으로 구성된다. 상승 국면에서의 5개의 파동은 각각 1번에서 5번까지의 파동으로 분류할 수 있는데, 상승하는 파동인 1번, 3번, 5번 파동은 충격파동(impulse wave)이라고 한다. 반대로 하락하는 파동인 2번과 4번 파동은 조정 파동(corrective wave)이라고 한다. 또한 하락 국면의 3개의 파동은, a파동에서 시작하여 c파동으로 끝나는 전체적인 움직임이 하락 움직임이므로 a파동과 c파동이 충격파동이 되는 것이고, 따라서 b파동은 조정 파동이 된다.

결국 엘리어트의 완전한 하나의 사이클은 1번 파동, 2번 파동, 3번 파동, 4번 파동, 5번 파동, 그리고 a파동, b파동, c파동으로 끝나게 되는 것이다. 또 한가지, 상승 파동이면 무조건 충격 파동이고 하락 파동이면 무조건 조정 파동이 되는 것은 아니다. 전체적인 시장의 움직임이 하락 국면이라면 하락 파동이 충격 파동이 되는 것이고, 반대로 전체적인 움직임이 상승 국면이라면 상승 파동이 충격 파동이 되는 것이다.

<그림 23>에서 보는 바와 같이 1번 파동부터 5번 파동까지는 전체적으로

보아 하나의 커다란 상승 파동이다. 또한 a파동에서 c파동까지는 하나의 커다란 하락 파동으로 볼 수 있다. 그렇다면 여기서 하나의 커다란 상승 파동은 5개의 파동으로 구성되며, 하나의 커다란 하락 파동은 3개의 파동으로 구성되어 있다고 말 할 수 있다. 즉, 하나의 큰 상승 파동은 5개의 작은 파동으로 세분되며, 하나의 큰 하락 파동은 3개의 파동으로 세분된다는 것이다. 다시 말해, 충격 파동은 5개의 파동으로 세분할 수 있고, 조정 파동은 3개의 파동으로 세분할 수 있다는 이야기이다.

이 논리를 1번 파동부터 c파동까지 각 파동에 적용시켜 한 단계씩 세분해서 생기는 파동들을 그림으로 나타내면 다음과 같다[18].




<그림 24> 기본 파동을 한 단계 세분했을 때 생기는 파동

결국 상승-하락의 하나의 큰 사이클을 세분해 보면, 5개의 파동과 3개의 파동, 합하여 8개의 파동으로 나누어진다. 그리고 한 단계 더 내려가면 전체 파동은 $5+3+5+3+5+5+3+5=34$개의 파동으로 세분된다. 또한 34개의 작은 파동들을 다시 각각 한 단계 더 낮추어서 나누면, 전부 144개의 미세한 파동으로 더 잘게 세분할 수 있는 것이다.

파동을 한 단계씩 세분해서 생기는 파동들의 숫자를 요약하여 정리하면 다음과 같다.

<표 6> 기본 파동을 세분했을 때 생기는 파동의 숫자

| 구 분 | 상승 국면의 파동 | 하락 국면의 파동 | 합 계 |
|---|---|---|---|
| 기본적인 파동 | 1 | 1 | 2 |
| 1차 세분시 | 5 | 3 | 8 |
| 2차 세분시 | 21 | 13 | 34 |
| 3차 세분시 | 89 | 55 | 144 |

각각의 파동의 개수들을 나타낸 숫자인 3이나 5, 그리고 그 합인 8, 또는 파동을 한 단계씩 세분해서 나타난 결과인 13, 21, 34, 55, 89, 144 등의 숫자는 파동을 세분해서 얻어진 숫자로서 바로 피보나치 수들이다.

## 나. 패턴(pattern), 비율(ratio), 시간(time)

엘리어트는 인간의 모든 행동은 패턴(pattern)과 비율(ratio)과 시간(time)이라는 세 가지의 요소로 구성되어 있는데, 이 모든 것이 피보나치 수열과 합치한다고 했다. 그러면 엘리어트의 이론에서 피보나치 수열은 어떻게 응용되고 있는지, 패턴, 비율, 시간이라는 측면에서 살펴보았다.

### (1) 패턴

엘리어트 파동 이론에 의하면, 모든 주식 시장의 움직임은 5파-3파로 구성되는 사이클을 반복하면서 움직인다. 그리고 한 사이클은 그보다 낮은 등급의 여러 사이클로 세분할 수 있고, 또한 그보다 한 등급 낮은 등급의 여러 사이클로 세분할 수 있고, 또한 그보다 한 등급 높은 사이클의 일부를 구성하는데, 이것이 바로 엘리어트가 이야기한 패턴이다. 이 패턴 속에는 말할 것도 없이 피보나치 수열이 숨어 있다. 5파-3파라는 기본적인 파동의 구성도 이미 피보나치 수열이고, 앞서 살펴본 것처럼 이들 파동을 세분해 나

갈 때 얻어지는 파동의 개수들, 즉 21개, 13개의 한 등급 낮은 파동의 개수이며, 또 두 등급 낟은 파동으로 세분할 때 얻어지는 89개, 55개라는 파동의 숫자들도 모두 피보나치 수열이다.

(2) 비율

우리는 앞에서 피보나치 수열 속에서 황금비를 찾을 수 있었다. 또한 황금비가 이집트시대나 피타고라스, 아리스토텔레스가 살았던 그리스 시대부터 유래되었음을 피라미드나 파르테논 신전 등의 예를 통해서 알 수 있었다. 결국은 이 비율은 인간의 행동을 지배하는 비율이며, 엘리어트 이론에서도 0.618, 1.618, 0.382, 2.618 등은 파동과 파동간의 관계를 밝히는데 중요한 비율들이다. 예를 들면, 2번 파동은 1번 파동의 38.2% 또는 61.8%의 길이만큼 형성된다는 식으로 이용된다. 따라서 이러한 비율들을 잘 알고 있으면 지지선이나 저항선을 구하는 데 아주 효과적으로 이용할 수 있으며, 나아가 현재의 움직임이 어느 수준에서 끝날지를 미리 알아볼 수도 있게 된다.

<표 7> 각 파동에서 피보나치 비율의 이용

| 파 동 | 피보나치 비율의 이용 |
|---|---|
| 2번파동 | 1번 파동을 38.2%의 비율로 되돌리거나 또는 61.8%의 비율로 되돌리려는 경향이 많음. |
| 3번파동 | 1번 파동의 1.618배의 길이로 형성되는 경우가 많음. |
| 4번파동 | 3번 파동을 38.2% 되돌리는 경우가 많음. |
| 5번파동 | 1번 파동의 길이와 같거나, 1번 파동에서 3번 파동까지 길이의 61.8%의 길이로 형성되는 경우가 많음. |
| b번파동 | 지그재그에서는 a파동을 38.2% 또는 61.8%의 비율로 되돌림. 그리고 불규칙 패턴에서는 a파동의 1.382배, 또는 1.236배의 길이로 나타나는 경향이 많음. |
| 삼각형 패턴 | 삼각형을 구성하는 각 파동들은 서로 서로 앞 파동의 61.8%의 길이로 결정되는 경우가 많음. |

그러므로 각 파동간의 비율이 피보나치 비율과 대부분 합치한다는 사실을 기억하고 있으면, 현재의 움직임이 어느 수준에서 끝날 것인지 미리 알 수 있게 된다.

예를 들어 주가가 활발하게 움직이며 상승하던 3번 파동이 끝난 것이 확인되고, 이제는 4번 파동으로 들어섰음이 확실하다고 하자. 그리고 3번 파동에서의 상승 움직임이 주가 지수 500에서 750까지 이어졌다면, 지금부터의 4번 파동은 3번 파동의 길이 즉 $750-500=250$의 38.2%정도 하락할 것으로 예상할 수 있다. 따라서 4번 파동은 654 수준까지 이어질 것이다( $750(750-500)\times0.382=654$).

이 비율이 100% 절대적인 것은 아니라 하더라도, 파동간의 비율을 잘 알아두면 주가 예측에 도움이 된다는 사실에는 역시 변함이 없다.

### (3) 시간

엘리어트는 인간의 행동 구성의 3요소 중 유감스럽게도 시간이라는 요소에 대해서는 그리 명쾌하게 이야기하고 있지 않다. 하지만 후세의 여러 연구에 의해 주식 시장에서 시간이라는 요소도 또한 피보나치 수열을 만족한다는 사실이 밝혀지고 있다. 한 파동을 형성하는 시간도 피보나치 수열과 합치한다는 것이다[3].

만약 주가의 움직임이 상승에서 하락으로 바뀌거나 또는 하락에서 상승으로 바뀌는 때가 있으면 그 파동이 초미세 파동이건, 중기 사이클이건, 아니면 장기 사이클이건 간에 한 파동이 끝났다는 것을 알게된다. 또한 주가의 움직임이 바뀌지 않는 한 현재의 파동은 계속 유효하다고 말할 수 있다. 그런데 앞서 한 파동을 형성하는 시간도 피보나치 수열과 합치한다고 하였으므로, 아주 간단한 방법으로 현재의 움직임이 언제 끝날지 미리 알 수 있다.

예를 들어 현재의 상승 움직임이 4일 동안 계속되고 있다면 내일 한 번 더 상승할 확률이 매우 높다. 왜냐하면, 4라는 숫자는 피보나치 숫자가 아니

므로 4일 동안의 상승 움직임이 한 파동을 형성하기보다는 5일 동안의 상승 움직임이 한 파동을 형성할 공산이 크기 때문이다. 또 지금까지의 하락 움직임이 11시간 동안 지속되었다면, 11은 피보나치 숫자가 아니고 가장 가까운 피보나치 숫자는 13이므로 앞으로 두 시간 더 상승하여 13시간을 채울 확률이 매우 높은 것이다. 만약 13시간이 지나고 14시간째에도 계속해서 상승한다면 말할 것도 없이 다음의 피보나치 숫자인 21시간이 될 때까지 상승을 계속할 가능성이 매우 높다고 말할 수 있다. 또한 이러한 시간 개념을 주간(weeks)이나 달(month), 또는 해(years)라는 보다 긴 시간의 흐름에도 물론 적용할 수 있다. 즉 7달째 상승 국면이 이어지고 있다면 8달째에도 상승할 가능성이 높다는 이야기이다.

다음의 표는 실제로 92년 8월 21일부터 94년 4월 4일까지의 주가 움직임에서 각각의 전환점간의 시간을 나타낸 것이다. 일부 예외도 있으나, 신기할 정도로 피보나치 수열과 일치하는 경우가 더 많다는 것을 쉽게 찾아 볼 수 있다[3].

<표 8> 기간별 주가지수

| 상 승 | | 하 락 | |
|---|---|---|---|
| 기 간 | 주가지수 | 기 간 | 주가지수 |
| 92.8.21～93.1.9 (21주) | 456～719 | 93.1.9～93.3.6 (8주) | 719～602 |
| 93.3.6～93.6.10 (13주) | 602～787 | 93.6.10～93.9.1 (11주) | 787～656 |
| 93.9.1～94.2.2 (21주) | 656～985 | 94.2.2～94.4.4 (11주) | 985～856 |

이제까지 살펴본 것처럼 증권시장에서 응용하고 있는 엘리어트 이론은 피보나치 수열을 기본 골격으로 하고 있다.

이것은 고대 이집트의 피라미드나 그리스 파르테논 신전의 건축에 쓰였던

황금비와 그 맥이 같은데, 황금비가 인간의 눈에 가장 편안하고 안정되며 아름답게 보이는 비인 것처럼 피보나치 수열은 인간의 행동을 구석구석 지배한다고 믿어진다. 따라서, 모든 주가의 움직임도 인간의 행동에서 비롯된 것이며, 이 행동 또한 피보나치 수열의 지배를 받기 때문에 주가의 움직임도 피보나치 비율에 따른다는 해석이 가능하게 된다. 실제로 피보나치 수열을 이용하면 현재의 주가 상승 추세가 정확하게 어느 수준까지 이어질 것인지, 또 주가는 어느 수준에서 바닥을 형성할 것이지 비교적 예측할 수 있게 된다.

# 5장　현장수업에의 활용

이상으로 피보나치 수열과 관계되는 여러 가지 사실들을 살펴보았다. 교과서 내용과 관련지어 활용할 수 있는 방법을 다음에 소개하였다. 교사들이 현장수업에 바로 사용할 수 있는 좋은 참고자료가 되었으면 한다.

## 1. 활용 내용

### 가. 피보나치 수를 이용하여 곱셈하기

이집트인들은 구구단을 외울 필요도 없고 계산기의 사용도 없이 두 정수를 곱셈하는 쉬운 방법을 알고 있었다. 그 방법은 한 수는 두 배하고 다른 수는 반을 하는 것이다[1].

21×15의 계산을 예로 들면 두 수를 두 열의 처음에 쓴 뒤 한 수는 두 배하고 다른 수는 나머지를 무시하고 반으로 하여 그 열의 수가 1이 될 때까지 한다.

<표 9> 이집트인들의 21×15의 계산

| 반 | 두 배 | |
|---|---|---|
| 21 | 15 | + |
| 10 | 30 | |
| 5 | 60 | + |
| 2 | 120 | |
| 1 | 240 | + |

반으로 하는 열의 수가 홀수이면 +로 표시하였는데, 표시된 곳을 두 배수를 더한다. $15+60+240=315$, 이것이 $21\times15$의 값이다.

또, $21=16+4+1=10101_{(2)}$ 이므로

$21\times15=(16+4+1)\times15=16\times15+4\times15+1\times15$

따라서 첫 번째, 세 번째, 다섯 번째 값의 합이 된다. 반으로 하는 수와 두 배 하는 수를 바꾸어도 결과는 마찬가지이다.

피보나치 수를 이용한 계산은 이집트 방법의 두 배하는 것을 더하기로 바꾼다. 역시 $21\times15$를 예로 들면 먼저 한 수 21을 택하고 오른 열의 처음에 두고, 왼쪽 열은 1부터 시작한다. 둘째 행은 2와 21의 두 배인 42로 이루어진다. 세 번째 행부터는 각 열을 따로 한 앞의 두 성분의 합이다. 또 왼쪽 열에는 피보나치 수가 오는데 피보나치 수가 곱셈에서 다른 수, 즉 15보다 커질 때까지 계속한다.

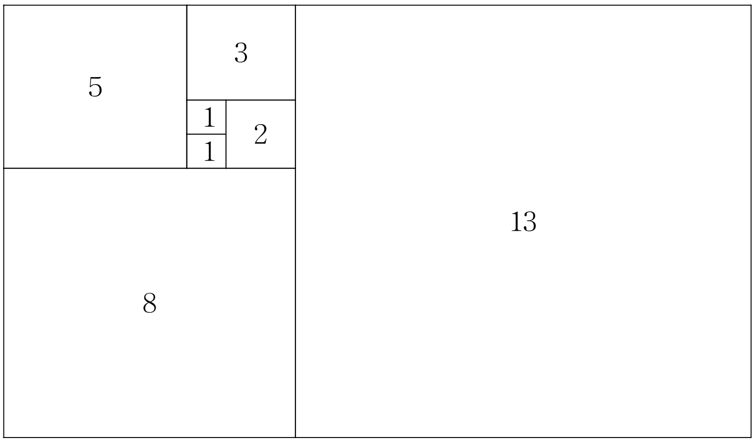
<표 10> 21×15의 피보나치 수를 이용한 계산

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 21 | |
| 2 | 42 | + |
| 3 | 63 | |
| 5 | 105 | |
| 8 | 168 | |
| 13 | 273 | + |
| 21 | | |

이번에는 왼쪽 열에서 더해서 15가 되는 곳에 +로 표시했는데, 표시된 곳의 오른쪽 성분을 다 합치면 역시 315가 된다. 물론 15가 되는 데는 여러 방법이 있겠으나 결과는 같다.

## 나. 황금분할된 황금사각형의 넓이 구하기

<그림 25>의 모든 정사각형과 직사각형은 피보나치 수를 그 길이로 갖는다. 각 직사각형의 넓이를 그것의 성분이 되는 정사각형의 넓이의 합으로 나타내면 다음과 같다[15].




<그림 25> 황금분할된 황금사각형

$$1^2+1^2=1\times2$$

$$1^2+1^2+2^2=2\times3$$

$$1^2+1^2+2^2+3^2=3\times5$$

$$1^2+1^2+2^2+3^2+5^2=5\times8$$

$$1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2=8\times13$$

$$1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2+13^2=13\times21$$

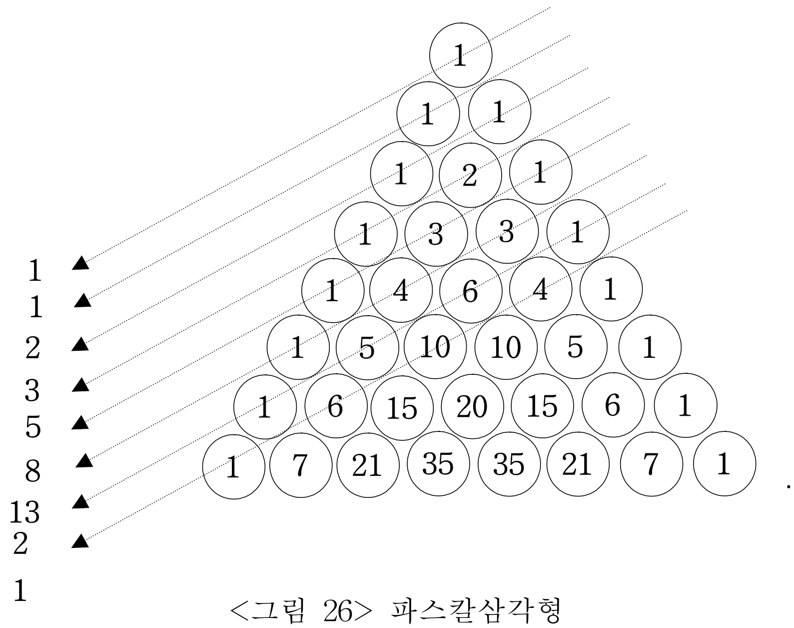
따라서, 황금분할된 황금사각형의 넓이는 정사각형에서 사용된 가장 큰 피보나치 수와 그 다음 피보나치 수의 곱이 됨을 알 수 있다.

## 다. 파스칼삼각형에서 피보나치 수 찾기

파스칼의 삼각형은 자연수를 삼각형 모양으로 배열한 것을 말한다. 1303년 중국인에 의해 유럽에 알려졌으나, 이 수 삼각형을 체계적으로 연구한 프랑스의 철학자이자 수학자인 파스칼의 이름을 따서 '파스칼의 삼각형'이라 불리고 있다[15].

파스칼의 삼각형은 어떤 수이든 위의 두 수의 합으로 되어 있는데, 이 삼각형에 쓰여 있는 숫자들을 조합하여 살펴보면 재미있는 사실들을 발견할 수 있다. 삼각수를 찾을 수 있고, 수열의 합에 살펴볼 수 있다. 또 각 행의 합은 2의 거듭제곱이 되고, 경우의 수를 의미하며, 그리고 피보나치 수를 찾을 수 있다는 것이다.

점선의 화살표를 따라가며 수들을 더하여 보자.




<그림 26> 파스칼삼각형

이 때 나온 값들 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …은 바로 피보나치의 수들이다.

## 라. 황금사각형으로 정이십면체 만들기

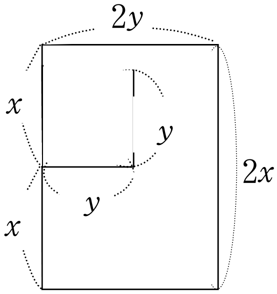
교과내용과 접목시킬 또 한 가지 방법은 황금사각형 3장을 서로 직각이 되도록 끼워 정이십면체 만들기를 실습할 수 있다는 것이다.

중학교 1학년 과정의 정다면체에서 정이십면체의 면의 개수, 꼭지점의 개수를 직접 헤아릴 수 있는 좋은 참고자료가 될 것이며, 직접 만들기를 체험할 수 있게 한다는 데도 큰 의미가 있을 것이다. 또한 각 모서리를 3등분하여, 각 꼭지점으로부터 $\frac{1}{3}$ 되는 점들을 연결하여 잘라내면 생기는 입체도형을 볼 수 있다. 그 입체도형은 축구공의 형태를 띠는데, 황금 사각형 3개가 바로 축구공의 골격이 된다[24].

<그림 27> 잘라만든 축구공

다음은 황금사각형 3개를 이용하여 정이십면체를 만드는 방법이다[16].

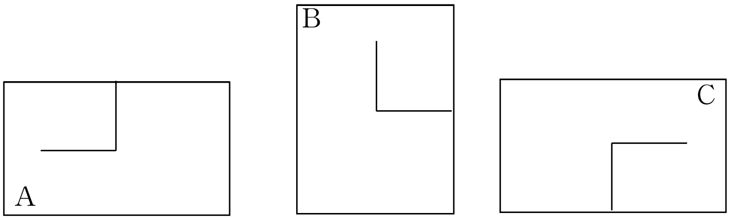
① 황금사각형 자르기



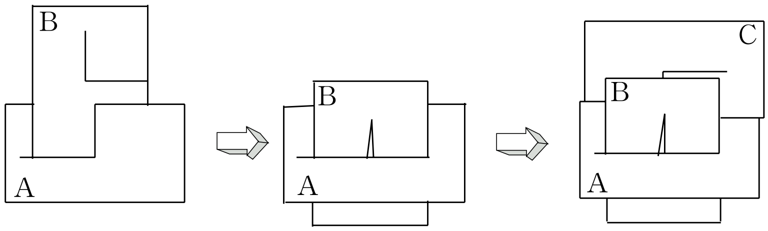

세 장의 종이를 끼워서 정이십면체를 만들려면 종이의 가로, 세로의 길이는 황금비를 이루어야 한다. 가로, 세로의 길이의 비가 황금비를 이루려면 오른쪽 그림과 같은 관계를 갖도록 황금사각형을 자르면 된다.( $2y : 2x = 1 : 1.618$)

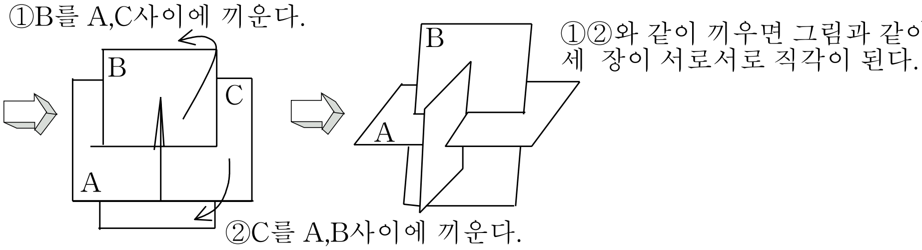
② 황금사각형 끼우기

다음과 같이 세 장의 황금사각형을 준비한다. 황금사각형 B, C는 황금사각형 A를 오른쪽으로 각각 90°, 180°씩 회전시킨 상태이다.



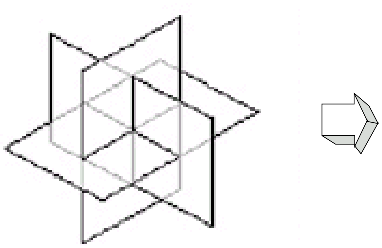

다음과 같이 세 장의 황금사각형을 차례로 끼운다.




③ 성냥 붙이기

성냥이나 이쑤시개를 황금사각형의 짧은 변 길이로 자른 후, 본드를 묻혀서 황금사각형의 꼭지점과 꼭지점을 차례로 연결하면 정이십면체가 된다.



### 마. 슬라이드 작성

본 논문의 내용을 중학교 학생의 수준에 맞추어 요약·정리해서 power point를 이용, 슬라이드를 작성하였다. CA시간이나 방과후에 운영되는 수학반의 활동에 도움이 될 것이다.

슬라이드로 작성된 내용은 부록으로 첨부하였다.

## 2. 활용 방안

### 가. 피보나치 수를 이용하여 곱셈하기

우리 나라 학생들은 모두 초등학교 2학년 수학시간에 구구단을 처음 접하게 되며 철저한 교육으로 '이사( $2 \times 4$ )는?'하고 물으면 기계적으로 '팔(8)'이라고 대답한다. 2와 4사이의 연산부호에 대하여는 전혀 생각지 않고 말이다. 이런 학생들에게 피보나치 수를 이용한 곱셈 방법이 오히려 더 어려울 수 있기 때문에 사실은 곱셈을 위하여 이런 방법을 사용하는 것은 불필요하다. 다만 곱셈을 하기 위하여 구구단이 필수적이라는 고정관념을 갖고 있는 학생들에게 구구단을 사용하지 않고도 곱셈이 가능함을 소개해 주는 재료로써 활용하면 좋을 것이다.

특별한 준비물은 없고 중학교 1학년의 유리수의 계산 중 곱셈에서 다루는 것이 적당하다.

### 나. 황금분할된 황금사각형의 넓이 구하기

황금분할된 황금사각형의 넓이 구하기는 황금사각형 작도 방법과 무리수에 대한 학습이 완료된 학생에게 투입할 수 있는 내용이다. 그런데 중학교 1학년 학생들은 무리수에 대한 학습이 이루어지지 않았고, 중학교 3학년의 무리수 부분에서는 교과서 내용에 작도가 병행되지 않는다. 때문에 특별활

동 시간에 무리수에 대한 학습과 작도에 대한 학습을 병행하며 활용할 수 있고, 학습도구로서 필기도구, 자, 컴퍼스가 준비되어야 한다.

## 다. 파스칼 삼각형에서 피보나치 수 찾기

중학교 2학년 교과서에 확률이라는 단원 중에 경우의 수를 구하는 내용이 있다. 이 때 파스칼 삼각형을 이용할 수 있음을 소개하며 더불어 그 속에서 피보나치 수를 학생들로 하여금 찾을 수 있도록 하면 될 것이다. 이 때 피보나치 수에 대한 학습이 선행되어야 하며, 특별한 준비물은 없다.

## 라. 황금사각형으로 정이십면체 만들기

중학교 1학년 과정에 정다면체를 학습해야 하는 단원이 있다. 정다면체 중 정이십면체는 그림을 보며 상상하기가 어려운데 직접 만들어 관찰하면 이해에 도움이 될 것이다. 또한 지루한 수학 시간에 만들기를 한다는 사실만으로도 학생들은 재미있어 할 것이다.

위의 순서대로 정이십면체를 만들기를 실험하려면 황금사각형 3장이 필요하며, 만약 황금사각형 작도가 어려우면 명함으로 대신할 수 있다. 이 이외에도 본드, 성냥개비나 이쑤시개, 가위, 칼이 준비되어야 한다.

## 마. 슬라이드 작성

논문의 내용을 중학교 학생들의 수준에 맞추어 작성하였다. 현장의 교사들은 대상 학생들의 수준에 맞게 재편성하여 활용할 수 있고, 더불어 특별활동 수학반의 수업 재료 부족으로 고민하는 교사들에게 조금이라도 보탬이 되었으면 한다.

# 6장　결론

'수학을 왜 배우는가?'에 대한 답으로써 '수학이 아름답기 때문'과 '실용학문이기 때문'은 빼놓을 수 없다. 그러나 현재 중・고등학교에 있는 학생들은 물론이거니와 학교를 졸업하고 사회인이 된 대부분의 사람들도 위의 두 가지 대답 중 어느 것에도 쉽게 수긍하지 못하는 것이 현실이다. 일반적으로 수학을 어렵게 느끼는 학생들이 "수학의 아름다움을 어디서 찾을 수 있는지" 혹은 "수학이 어디에 쓰이고 있는지"를 질문할 때, 교육현장의 교사들은 이에 알맞은 소재를 찾아 대답해 주기가 쉽지 않은 것은 사실이다. 또 입시위주의 교육에 치중하다 보니 교사도 학생의 문제풀이 능력의 신장에만 목적을 두며, 수학의 쓰임에 대한 것은 생각할 필요도 없었다.

이런 이유로 대부분의 사람들에게 수학은 실제로 적용되는 것이 아니라 고통스러운 학문으로서만 기억되고 있다. 또 수학은 일련의 암기과정이며 논리적 사고를 바탕으로 하는 학문의 기본 수단 정도로만 인식하고 있다. 또 수학의 어떤 이론은 이론으로서만 존재하며, 그것이 실제로 응용된다는 것을 전혀 인식하지 못하고 있는 것도 사실이다.

그러나 21세기를 정보화, 세계화, 산업화 시대라 일컬으며, 학생들의 다양한 적성 계발과 창의성 신장을 위한 교육을 강조하고 있는 이 때 수학의 중요성이 더욱 강조될 수밖에 없다. 이런 시대적 흐름에 발맞추어 현장교육을 책임지고 있는 교사들도 과거의 주입식의 교육이 아니라 이제는 수학의 아름다움에 대한 측면과 수학의 쓰임에 대한 측면 등, 수학의 참모습 교육에 보다 노력을 기울여야 할 것이다.

이 논문에서는 수학의 아름다움과 실용성을 동시에 보여 줄 수 있는 예로써 피보나치 수열과 그 응용 분야를 중심으로 살펴보았다. 자연현상 속에서 관찰되어지는 피보나치 수열의 모습, 예술과 건축, 컴퓨터와 주식시장에서 적용되어지는 피보나치 수열의 모습을 조사하였으며, 더욱이 현장수업에서

중학교 학생이면 쉽게 이해할 수 있는 수업 자료로써 활용될 수 있도록 그 방안을 검토해 보았다.

중세 수학의 일상 생활의 토끼 번식 문제에서 파생된 피보나치 수열은, 수열 그 자체의 성질뿐만 아니라, 자연 속에서 쉽게 관찰될 수 있는 동물·식물계의 법칙, 예술과 건축에의 활용, 또한 컴퓨터와 주식시장에서의 응용되므로 수학의 아름다운 모습과 수학의 실용성을 보여줄 수 있는 좋은 재료 중의 하나이다.

아름다운 조화를 이야기할 때, 대체로 우리는 황금분할을 말하는데, 바로 그것이 피보나치 수열의 성질 중 하나라는 사실과 더불어, 음악에서 작곡은 물론 피아노나 바이올린 같은 악기의 구조와도 상당히 밀접한 관계에 있다는 사실이 수학을 기피하는 학생에게 다소나마 수학에 관심을 집중시키는데 일익을 담당하리라고 생각한다.

더욱이 1200년경에 만들어진 수학의 한 이론이 발전을 거듭하여 정보화 사회라고 일컬어지는 21세기에 새로운 국면으로, 즉 1200년 당시 전혀 예측할 수 없었던 컴퓨터나 증권시장에 응용될 수 있다는 점을 강조함으로써 학생들에게 수학의 역동성을 보여주는 실례가 될 것이다. 그로 인해 수학의 어느 분야도 지금의 실용성과는 상관없이 앞으로 무한한 생명력을 지닌 것으로 설명할 수 있을 것이다.

본 논문을 요약하면 다음과 같다.

<u>첫째</u>, 피보나치의 학문적인 업적은 인도와 아라비아 수학에 대한 유럽 최초의 연구서인 <산반서>로 대표되는데, 여기서 그는 피보나치 수열을 탄생시켰으며, 이 저서는 널리 보급되어 수학발전에 큰 영향을 끼쳤다.

<u>둘째</u>, 수열의 정의와 수열 속에서 발견되는 재미있는 특징을 서술하였다.

<u>셋째</u>, 자연현상, 예술 및 건축 분야에 나타난 피보나치 수열을 황금비와 관련하여 체계적으로 조사하였다.

<u>넷째</u>, 현대의 컴퓨터 분야에서의 피보나치 검색, 증권분야에서 피보나치 수열을 어떻게 응용하고 있는지 조사하였다.

<u>다섯째</u>, 피보나치 수열을 현장수업에 활용할 수 있는 방법을 찾아보았다.

여섯째, 체계적으로 조사·분석한 피보나치 수열의 내용을 현장 수업에서 활용할 수 있도록 power point를 이용하여 작성하였다. 이렇게 준비한 자료를 본인이 재직하는 중학교의 수학반 활동에 도입하여 수업을 진행해본 결과 고정관념을 탈피한 수학의 다른 모습에 학생들이 감탄을 금치 못하며 수학에 보다 적극적인 자세를 가짐을 느낄 수 있었다.

물론 이 연구 결과가 현장에서 실효를 거두기 위해서는 교사들의 선행 준비가 많이 이루어져야 한다. 이 연구에서 추구했던 바와 같이, 수학의 아름다움과 그 실용성을 학생들에게 알려주기 위해서는 무엇보다 교사들 먼저, 시험을 위한 수학이 아니라 수학 자체의 중요성을 인식하도록 노력해야 할 것이다. 주어진 틀에 맞추어 단순한 지식 주입의 교육에서 벗어나 이제는 교사들이 학생들에게 수학의 아름다움을 볼 수 있는 안목을 제공하여야 한다. 또 입시 때문에 억지로 하는 수학이 아니라 수학의 중요성을 느낄 수 있고, 학생들이 수학을 즐길 수 있도록 지도하여야 한다.

날로 수학의 중요성을 강조하고 있는 것은 우리 시대의 문화 속에 수학이 차지하는 비중이 커졌기 때문이다. 대중의 눈에는 잘 드러나지 않지만, 수학적, 통계적 아이디어는 우리 시민의 삶을 둘러싼 과학 기술 환경의 곳곳에 스며들어 있다. 수학적 아이디어는 다음과 같은 여러 가지 차원에서 우리의 삶과 활동 방식에 영향을 미치고 있다[17].

첫째, 실용적 지식으로서 기본 생활 수준을 개선하는 데 직접적으로 사용될 수 있다. 자금 대출 기준의 비교, 위험 요소에 대한 산정, 상품 단가의 계산, 계량기 눈금에 대한 이해, 다양한 물가 상승 지수에 대한 해석 등은 실생활에 직접적이고 실제적인 혜택을 준다.

둘째, 시민적 개념으로서 공공 정책에 대한 이해를 도울 수 있다. 핵 오염, 세율, 공중 보건 등에 관한 대중적 토론, 범죄 관련 자료로부터 나오는 추정, 인구 성장에 관련된 예측, 금리 상승에 영향을 미치는 요인들 사이의 상호 작용 등의 공공 정책에 대한 이해를 돕는다.

셋째, 전문적 기능 발휘의 도구로서 수학의 사용은 필수적이다. 이론물리학에서 기업 경영에 이르기까지, 과학과 산업은 의사 소통 언어와 탐구 방

법으로서 수학에 갈수록 의존하게 된다.

넷째, 여가로서의 수학적 논리적 도전을 즐기려는 경향이 늘고 있다. 전략 게임, 퍼즐, 복권, 스포츠를 통한 내기 등에 대한 대중적 인기는 대중의 피상적 무관심 바로 밑에 아마추어 수학의 굵은 동맥이 흐르고 있음을 드러내고 있다. 기꺼이 인정하려는 사람은 드물겠지만, 많은 사람들에게 수학은 정말 재미를 주는 역할을 하고 있다.

교육에서의 수학의 특별한 역할은 수학의 보편적 응용 가능성의 결과이다. 그 결과를 통하여 과학에 진리의 근거와 확실성의 기준을 제공하며, 모델링, 최적화, 논리적 분석, 추론, 기호의 사용 등의 수학적 특유의 사고 양식을 제공한다. 이 수학적 사고 양식을 통한 경험은 비판적으로 읽고, 오류를 지적하고, 오차를 찾아내고, 위험을 산정 하는 능력을 길러 정보로 가득찬 이 세상을 보다 잘 이해할 수 있도록 우리의 힘을 키워 줄 것이다.

800년 전에 만들어진 피보나치 수열이 발전을 거듭하며 정보화 사회의 컴퓨터, 주식시장에 적용되고 있고, 수학에서 가장 순수하고 가장 응용이 안되는 분야라고 일컬어지던 정수론은 오늘날, 자동화시스템 관리, 원거리 위성으로부터 자료 전송, 재정 기록의 해독 방지, 계산기의 효율적 알고리즘 등을 포함하는 많은 응용분야에서 없어서는 안될 전제조건으로 연구되고 있다. 이처럼 수학은 정보화 사회에서 실생활의 문제를 해결해주는 가장 근본적인 역할을 담당하고 있다.

수학과 생물학의 만남에서 피보나치 수열의 중요성과 더불어, 최근에는 DNA 염기 서열 해석, 유전과 암호를 풀어내는 암호 이론 등, 수학의 역동성을 강조해야 할 것이다. 또 수학과 전산·정보 과학의 만남에서도 피보나치 수열을 이용한 데이터 탐색뿐만 아니라, 차세대 컴퓨터에 주요 이론을 제공하는 코딩이론, CD-ROM 제작에 이용되는 프랙탈 이론, 지문 인식에 이용되는 웨이브렛 이론 등, 수학의 참 모습을 교육현장에서 알려주어야 한다. 그리하여 미래 세계에 학생들이 적극적으로 참여할 수 있도록 학생들의 수학적 힘의 계발에 모든 노력을 기울여야 할 것이다.

# 참 고 문 헌


[1] 김상숙, 『피보나치 수열에 대하여』, 경북대학교 교육대학원 석사학위 논문, 1999

[2] 김용운・김용국, 수학사대전, 우성, 1996

[3] 김중근, 엘리어트 파동 이론 : 자연의 법칙과 증권시장, 1994, 사계절

[4] 박은주, 『황금비를 적용한 미술의 구조 연구』, 성신여자대학교 교육대학원 석사학위 논문, 1988

[5] 방신경,『C. Debussy 음악에서의 황금분할에 의한 비례적 구조의 연구 』, 성신여자대학교 교육대학원 석사학위 논문, 1996

[6] 오시봉, 『피보나치 수열과 황금비에 관한 연구』, 제주대학교 교육대학원, 석사학위 논문, 1999

[7] 유 극, 황금분할, 서울:기문당, 1985

[8] 윤목근, 『Bela Bartok의 화성과 형성에 있어서 피보나치 수열 원리에 의한 관계분석 연구』, 조선대학교 교육대학원, 석사학위 논문, 1990

[9] 이언 스튜어트, 자연의 수학적 본성, 두산동아, 1996

[10] 수학사랑 통권 10호(1997. 겨울호) p.22 ~ p.29

[11] 수학사랑 통권 11호(1998. 봄호) p.18 ~ p.27

[12] 수학사랑 통권 12호(1998. 여름호) p.20 ~ p.24

[13] 수학사랑 통권 13호(1998. 가을호) p.16 ~ p.20

[14] 수학사랑 통권 18호(1999. 겨울호) p.73 ~ p.74

[15] 수학사랑 통권 20호(2000. 4월호) p.40 ~ p.43

[16] 하워드 이브, 이우역, 신항균 옮김, 수학사, 경문사, 1998

[17] 한국수학교육학회, “모두가 중요하다”, 1996

[18] http://www.pigderam.com/elliottwave.htm

[19] http://www.ee.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html

[20] http://www.ee.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat2.html

[21] http://www.ee.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibpuzzles.html

[22] http://www.Knr.co.kr/myhome/html/stock_004.htm

[23] http://www.inchon-e.ac.kr/~shsong/%b0%fa%c7%d0%c5%bd%b1%b8.htm

[24] http://www.mathlove.com./.event/mathexper/place3.html

# ABSTRACT

## About the Fibonacci sequenc

History and application of a Fibonacci sequence - laying stress on actual classroom lectures and in the viewpoint of modern interpretation

Park, Sook
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education
Han Nam University
Supervised by Professor Choi, Eunmi

Everyone says that in 21century we require lots of scientific knowledges including mathematics and computer. However, many school students feel that learning mathematics is very difficulty and even do not realize where the mathematics is used.

In this thesis we develop a way to teach mathematics easily and accessible to middle and highschool students. For this purpose, we consider Fibonacci sequence which is probably one of the best known sequences, developed in 1200 but still works in these days.

The rabbit breeding problem that caused Fibonacci to write about the

sequence looks (may be) unrealistic (Chapter 1). But the Fibonacci numbers really do appear in nature. For example, plants, flowers and snails (Chapter 3). Moreover a special value, closely related to the Fibonacci series, is called the golden ratio. This value is obtained by taking the ratio of successive terms in the Fibonacci series. This limit is actually the positive root of a quadratic equation and is called the golden section, golden ratio or sometimes the golden mean. The ratio is usually is used to paintings, sculptures and in many aries of arts, including music (Chapter 3). What is even more remarkable in these days is that, the Fibonacci sequence is used to predict rise and fall in stock market. It was Ralph Nelson Elliott in the 1930's who developed the Elliott Wave Theory based on Fibonacci sequence. The Elliott Waves describe the ebb and flow of collective mood. A bull market in collective mood is caused by our need to build a better future based on material values (Chapter 4). Finally we develop new ways to teach Pascal triangular, multiplication table and making icosahedron in class, based on the Fibonacci theory (Chapter 5).