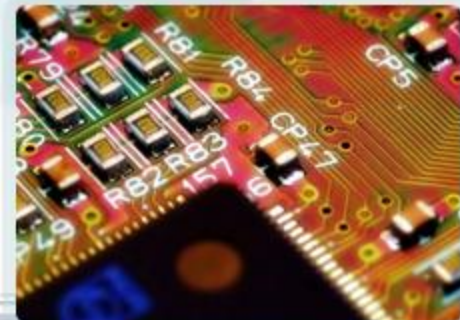


3강

# 논리게이트와 부울대수 (2)

한국방송통신대학교  
컴퓨터과학과 김형근 교수





# 제 3 장 논리 게이트와 부울대수

## 강 의 내 용

1. 부울함수의 대수적 간소화

2. 부울함수의 정규형 및 표준형



## 3.2.3 부울함수의 대수적 간소화

### ❖ 합의 정리(consensus theorem)

$$XY + \bar{X}Z + YZ = XY + \bar{X}Z$$

$$\begin{aligned} XY + \bar{X}Z + YZ &= XY + \bar{X}Z + (X + \bar{X})YZ \\ &= XY + \bar{X}Z + XYZ + \bar{X}YZ \\ &= XY + XYZ + \bar{X}Z + \bar{X}YZ \\ &= XY(1 + Z) + \bar{X}Z(1 + Y) \\ &= XY + \bar{X}Z \end{aligned}$$

어느 한 변수( $X$ )가  
주어진 부울식의  
어느 한 항( $XY$ )에 있고,  
그 변수의 보수( $\bar{X}$ )가  
다른 항( $\bar{X}Z$ )에 있을 때  
나머지 변수의 곱( $YZ$ )항  
을 콘센서스항이라 한다.

### 3.2.3 부울함수의 대수적 간소화

예제)  $F = (X + Y)(\bar{X} + Z)$  를 합의 정리를 이용하여 간소화

$$\begin{aligned} F &= (X + Y)(\bar{X} + Z) \\ &= X\bar{X} + XZ + Y\bar{X} + YZ \\ &= XZ + Y\bar{X} + YZ \\ &= XZ + \bar{X}Y + YZ \\ &= XZ + \bar{X}Y \end{aligned}$$

## 3.2.5 부울함수의 보수

부울함수  $F$ 의 보수는  $\overline{F}$

예) 부울함수  $F = \overline{X}Y\overline{Z} + \overline{X}\overline{Y}Z$ 의 보수를 구하시오

$$\begin{aligned}\overline{F} &= \overline{(\overline{X}Y\overline{Z} + \overline{X}\overline{Y}Z)} = \overline{(\overline{X}Y\overline{Z})} \cdot \overline{\overline{X}\overline{Y}Z} \\ &= (X + \overline{Y} + Z) \cdot (X + Y + \overline{Z})\end{aligned}$$

드모르간 정리 이용

(AND와 OR를 서로 바꾸고, 각 변수의 보수를 취한다.)

예) 부울함수  $F = \overline{X}Y\overline{Z} + \overline{X}\overline{Y}Z$ 의 보수를 구하시오

$$F \text{의 쌍대} : (\overline{X} + Y + \overline{Z}) \cdot (\overline{X} + \overline{Y} + Z)$$

$$\text{각 문자의 보수} : (X + \overline{Y} + Z) \cdot (X + Y + \overline{Z})$$

$$\therefore \overline{F} = (X + \overline{Y} + Z) \cdot (X + Y + \overline{Z})$$

## 3.3 부울함수의 정규형 및 표준형

### ❖ 정규형

: 부울함수를 **최소항의 합**(sum of minterm)이나 **최대항의 곱**(product of maxterm)으로 표현한 것

#### (1) 최소항과 최대항

2개의 논리변수  $X, Y$ 가 있을때

##### ➤ 최소항

: 논리곱(AND)으로 표현되는  $XY, X\bar{Y}, \bar{X}Y, \bar{X}\bar{Y}$ 의 네 가지 항( 그 결과가 **논리-1**)

##### ➤ 최대항

: 논리합(OR)으로 표현되는  $X+Y, \bar{X}+Y, X+\bar{Y}, \bar{X}+\bar{Y}$ 의 네 가지 항( 그 결과가 **논리-0**)

## 3.3 부울함수의 정규형 및 표준형

### ① 최소항

$n$  개의 논리변수로 구성된 부울함수에서 최소항이란 각 변수의 문자 1개씩 모두  $n$  개의 문자의 논리곱항으로서, 그 결과가 논리-1인 경우.  $m_j$  로 표시

X	Y	Z	최소항	
			항	표시
0	0	0	$\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$	$m_0$
0	0	1	$\overline{X}\overline{Y}Z$	$m_1$
0	1	0	$\overline{X}Y\overline{Z}$	$m_2$
0	1	1	$\overline{X}YZ$	$m_3$
1	0	0	$X\overline{Y}\overline{Z}$	$m_4$
1	0	1	$X\overline{Y}Z$	$m_5$
1	1	0	$XY\overline{Z}$	$m_6$
1	1	1	$XYZ$	$m_7$

## 3.3 부울함수의 정규형 및 표준형

### ② 최대항

$n$  개의 논리변수로 구성된 부울함수에서 최대항이란 각 변수의 문자 1개씩 모두  $n$  개의 문자의 논리합항으로서, 그 결과가 논리-0인 경우.  $M_j$  로 표시

X	Y	Z	최대항	
			항	표시
0	0	0	$X+Y+Z$	$M_0$
0	0	1	$X+Y+\bar{Z}$	$M_1$
0	1	0	$X+\bar{Y}+Z$	$M_2$
0	1	1	$X+\bar{Y}+\bar{Z}$	$M_3$
1	0	0	$\bar{X}+Y+Z$	$M_4$
1	0	1	$\bar{X}+Y+\bar{Z}$	$M_5$
1	1	0	$\bar{X}+\bar{Y}+Z$	$M_6$
1	1	1	$\bar{X}+\bar{Y}+\bar{Z}$	$M_7$



### 3.3 부울함수의 정규형 및 표준형

#### ③ 진리표를 부울함수로 표현(최소항의 합 형태로)

X	Y	Z	최소항	
			항	표시
0	0	0	$\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$	$m_0$
0	0	1	$\overline{X}\overline{Y}Z$	$m_1$
0	1	0	$\overline{X}Y\overline{Z}$	$m_2$
0	1	1	$\overline{X}YZ$	$m_3$
1	0	0	$X\overline{Y}\overline{Z}$	$m_4$
1	0	1	$X\overline{Y}Z$	$m_5$
1	1	0	$XY\overline{Z}$	$m_6$
1	1	1	$XYZ$	$m_7$

$$F = \overline{X}\overline{Y}\overline{Z} + \overline{X}\overline{Y}Z + \overline{X}Y\overline{Z} + \overline{X}YZ + X\overline{Y}\overline{Z} + X\overline{Y}Z + XY\overline{Z} + XYZ$$
$$= m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$$

$$F(X, Y, Z) = \sum_m (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

### 3.3 부울함수의 정규형 및 표준형

#### ④ 진리표를 부울함수로 표현(최대항의 곱 형태로)

X	Y	Z	최대항	
			항	표시
0	0	0	$X+Y+Z$	$M_0$
0	0	1	$X+Y+\bar{Z}$	$M_1$
0	1	0	$X+\bar{Y}+Z$	$M_2$
0	1	1	$X+\bar{Y}+\bar{Z}$	$M_3$
1	0	0	$\bar{X}+Y+Z$	$M_4$
1	0	1	$\bar{X}+Y+\bar{Z}$	$M_5$
1	1	0	$\bar{X}+\bar{Y}+Z$	$M_6$
1	1	1	$\bar{X}+\bar{Y}+\bar{Z}$	$M_7$

$$\begin{aligned} F &= (X + Y + Z)(X + Y + \bar{Z})(X + \bar{Y} + Z)(X + \bar{Y} + \bar{Z}) \\ &\quad (\bar{X} + Y + Z)(\bar{X} + Y + \bar{Z})(\bar{X} + \bar{Y} + Z)(\bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}) \\ &= M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_4 \cdot M_5 \cdot M_6 \cdot M_7 \end{aligned}$$

$$F(X, Y, Z) = \prod M(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

## 3.3 부울함수의 정규형 및 표준형

### (2) 최소항의 합 으로 부울함수 표현

- ✓ 진리표에서 출력이 1이 되는 최소항들을 논리합(OR)으로 묶으면 정규형 부울함수가 구해진다.

예1)

입력	X	0	0	0	0	1	1	1	1
	Y	0	0	1	1	0	0	1	1
	Z	0	1	0	1	0	1	0	1
출력	F	0	1	0	0	1	0	0	1

- 진리표에서 출력 F가 1이 되기 위해서는 001, 100, 111 중에 하나이면 된다.(세가지 경우가 OR 관계)

➤ 따라서 
$$F = \overline{X}\overline{Y}Z + X\overline{Y}\overline{Z} + XYZ$$

## 3.3 부울함수의 정규형 및 표준형

### (2) 최소항의 합 으로 부울함수 표현

예2) 부울함수  $F = X + YZ$  를 최소항의 합으로 표현

$$\begin{aligned} F &= X + YZ = X(Y + \bar{Y}) + (X + \bar{X})YZ \\ &= XY + X\bar{Y} + XY\bar{Z} + \bar{X}Y\bar{Z} \\ &= XY(Z + \bar{Z}) + X\bar{Y}(Z + \bar{Z}) + XY\bar{Z} + \bar{X}Y\bar{Z} \\ &= XYZ + XY\bar{Z} + X\bar{Y}Z + X\bar{Y}\bar{Z} + XY\bar{Z} + \bar{X}Y\bar{Z} \\ &= XYZ + XY\bar{Z} + X\bar{Y}Z + X\bar{Y}\bar{Z} + \bar{X}Y\bar{Z} \end{aligned}$$

➤ 다른 표현으로  $F = m_7 + m_6 + m_5 + m_4 + m_2$

$$F(X, Y, Z) = \sum m(2, 4, 5, 6, 7)$$

## 3.3 부울함수의 정규형 및 표준형

### (3) 최대항의 곱 으로 부울함수 표현

- ✓ 진리표에서 출력이 0이 되는 최대항들을 논리곱(AND)으로 묶으면 정규형 부울함수가 구해진다.

예1)

입력	X	0	0	0	0	1	1	1	1
	Y	0	0	1	1	0	0	1	1
	Z	0	1	0	1	0	1	0	1
출력	F	0	1	0	0	1	0	0	1

- 진리표에서 출력 F가 0이 되기 위해서는 000, 010, 011, 101, 110 중에 하나이면 된다.(다섯가지 경우가 AND 관계)

➤ 따라서 
$$F = (X + Y + Z)(X + \bar{Y} + Z)(X + \bar{Y} + \bar{Z})(\bar{X} + Y + \bar{Z})(\bar{X} + \bar{Y} + Z)$$

## 3.3 부울함수의 정규형 및 표준형

### (3) 최대항의 곱 으로 부울함수 표현

예2) 부울함수  $F = XY + \bar{X}Z$  를 최대항의 곱으로 표현

$$\begin{aligned} F &= XY + \bar{X}Z = (XY + \bar{X})(XY + Z) \\ &= (X + \bar{X})(Y + \bar{X})(X + Z)(Y + Z) = (\bar{X} + Y)(X + Z)(Y + Z) \\ &= (\bar{X} + Y + Z\bar{Z})(X + Y\bar{Y} + Z)(X\bar{X} + Y + Z) \\ &= (\bar{X} + Y + Z)(\bar{X} + Y + \bar{Z})(X + Y + Z)(X + \bar{Y} + Z)(X + Y + Z)(\bar{X} + Y + Z) \\ &= (X + Y + Z)(X + \bar{Y} + Z)(\bar{X} + Y + Z)(\bar{X} + Y + \bar{Z}) \end{aligned}$$

➤ 다른 표현으로

$$F = M_0 \cdot M_2 \cdot M_4 \cdot M_5$$

$$F(X, Y, Z) = \prod M(0, 2, 4, 5)$$

## 3.3 부울함수의 정규형 및 표준형

### ❖ 표준형

- 부울함수를 표현하는 또 다른 형태(**간소화된 형태**)
- 각 항은 **하나 또는 그 이상의 문자**로 구성되며, 곱의 합(sum of products)과 합의 곱(product of sums)이 있다.
  - 정규형은 진리표에서 바로 얻을 수 있지만, 최소항 또는 최대항에 **모든 변수가 포함**되어 있어 부울함수의 간소화에는 부적합
  - 따라서 정규형으로부터 간소화된 표준형으로 변환이 필요

## 3.3 부울함수의 정규형 및 표준형

### ❖ 표준형

#### (1) 곱의 합

예1)

입력	X	0	0	0	0	1	1	1	1
	Y	0	0	1	1	0	0	1	1
	Z	0	1	0	1	0	1	0	1
출력	F	0	0	1	1	0	1	1	1

- ✓ 먼저 주어진 진리표에서 정규형 부울함수를 구하면

$$F = \overline{X}\overline{Y}\overline{Z} + \overline{X}YZ + X\overline{Y}\overline{Z} + XY\overline{Z} + XYZ \text{ 가 된다.}$$

- ✓ 다음으로 대수적인 간소화를 통해 간소화하면

$$\text{표준형 부울함수 } F = X + YZ \text{ (곱의 합)가 구해진다.}$$

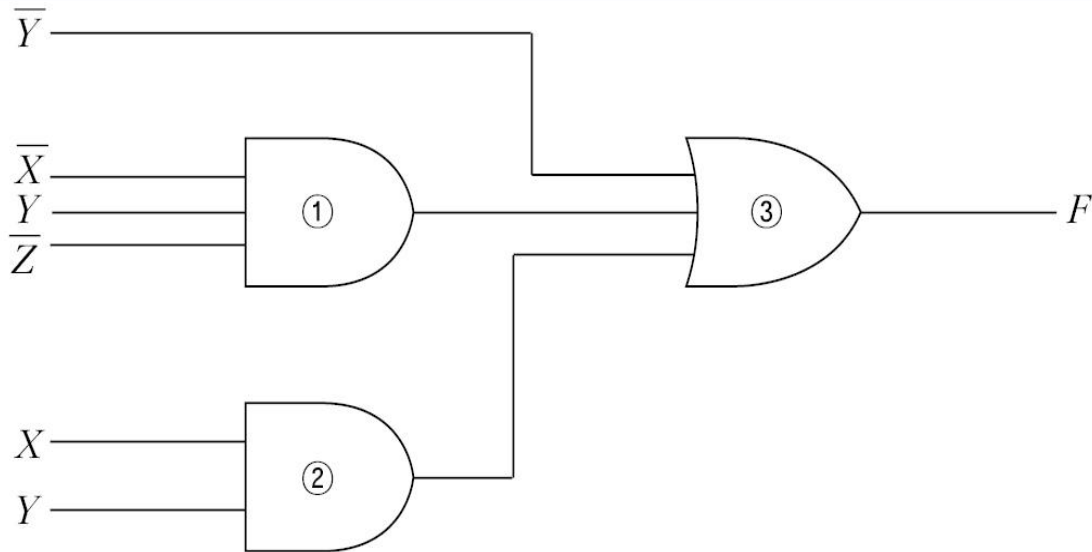


## 3.3 부울함수의 정규형 및 표준형

### ❖ 표준형

#### (1) 곱의 합

예2) 곱의 합(표준형)으로 표현된  $F = \bar{Y} + \bar{X}Y\bar{Z} + XY$  의 논리회로도 구현



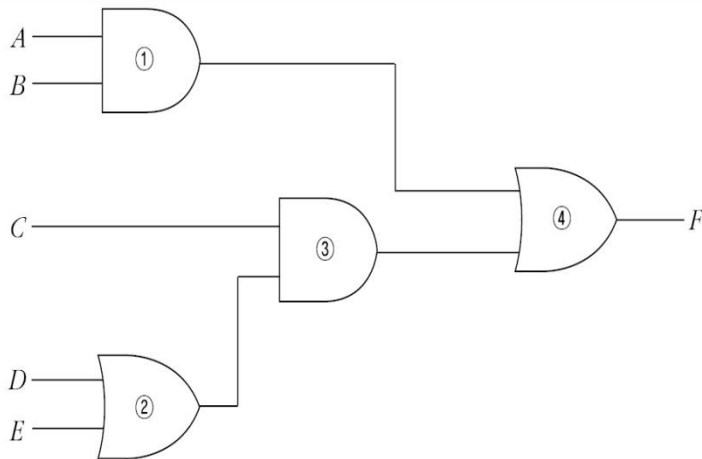
## 3.3 부울함수의 정규형 및 표준형

### ❖ 표준형

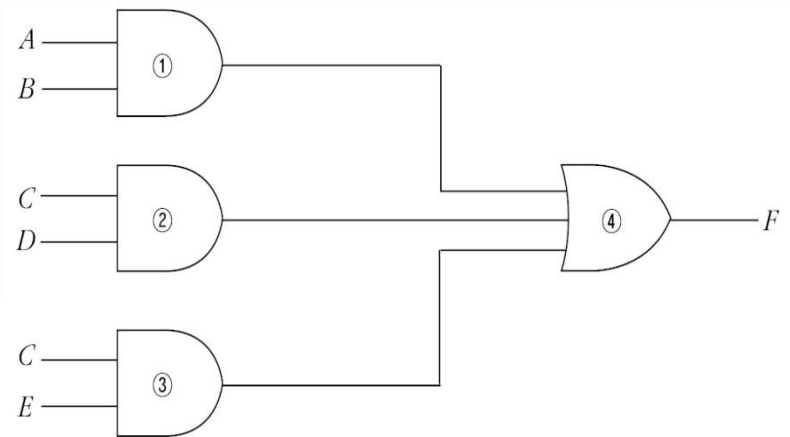
#### (1) 곱의 합

예3)  $F = AB + C(D + E)$  (곱의 합이 아님)과

$F = AB + C(D + E) = AB + CD + CE$  (곱의 합) 의 차이점



$$F = AB + C(D + E)$$



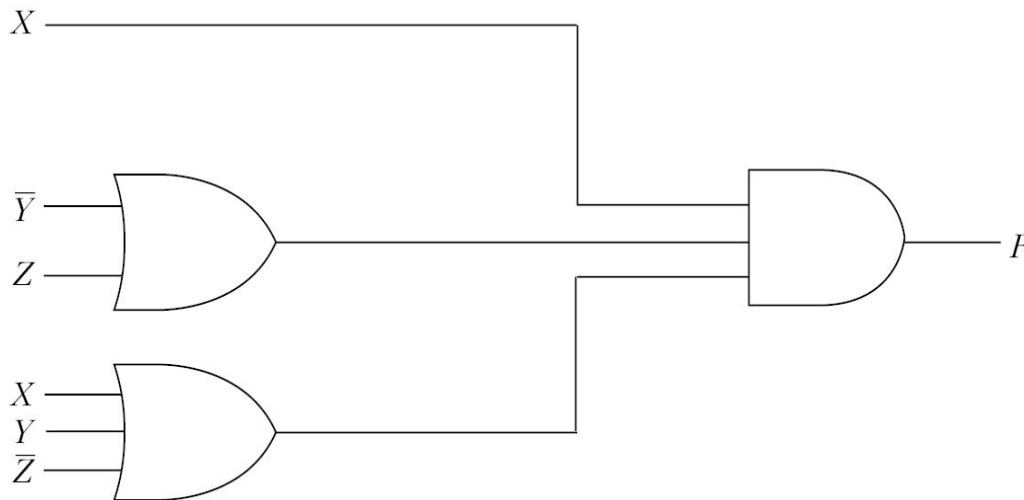
$$F = AB + CD + CE$$

## 3.3 부울함수의 정규형 및 표준형

### ❖ 표준형

#### (2) 합의 곱

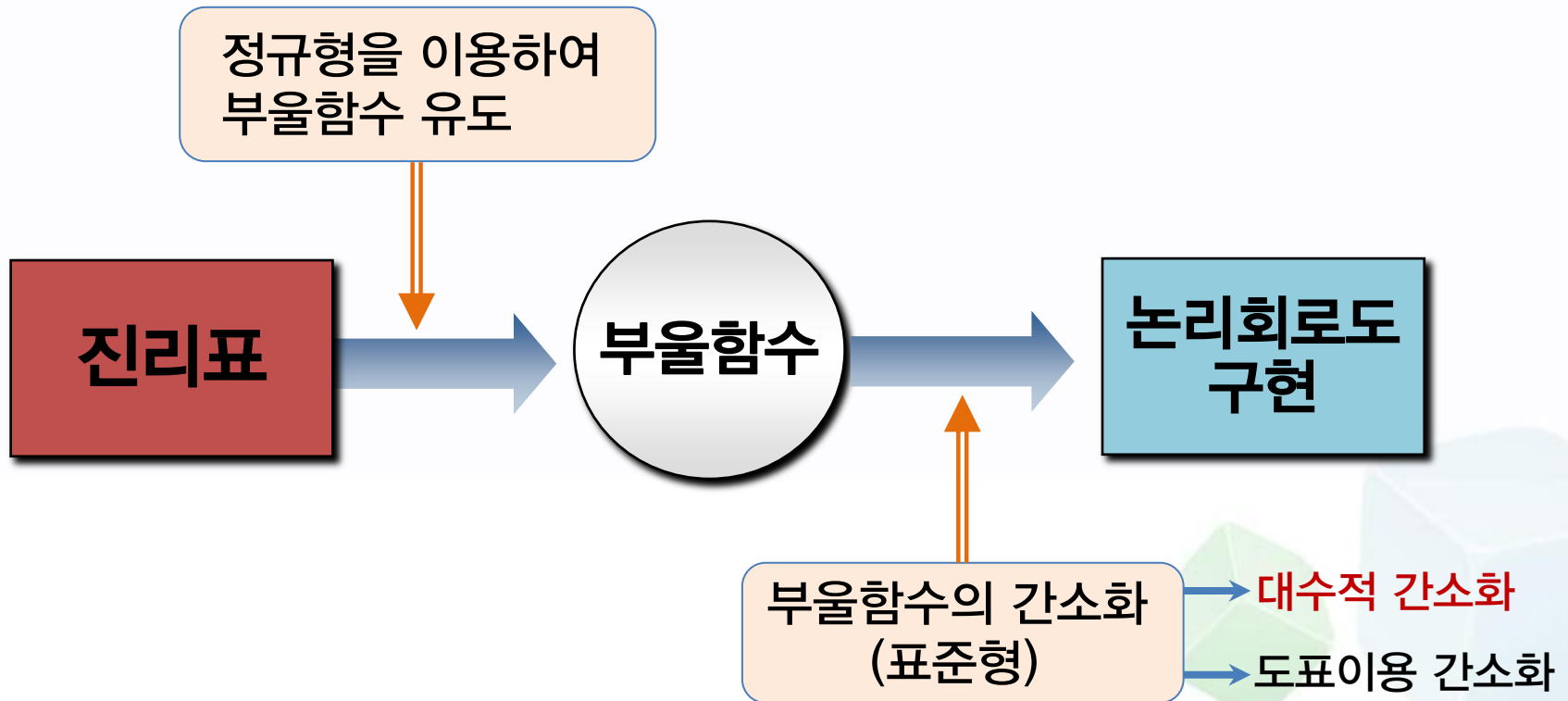
예)  $F = X(\bar{Y} + Z)(X + Y + \bar{Z})$  (**합의 곱 형태**)의  
논리회로도 구현



## 3.3 부울함수의 정규형 및 표준형

### ❖ 부울함수의 필요성

– 논리회로를 설계하고자 할 때





# 3강 내용 정리

## ❖ 논리게이트와 부울 대수

- ✓ 부울함수의 대수적 간소화
- ✓ 부울함수의 정규형과 표준형



다음강의 예고

4강

# 부울함수의 간소화 및 구현

한국방송통신대학교  
컴퓨터과학과 김형근 교수

